**Nome e matricola:** ..........................................................................

**Corso di studi:** ..............................................................................

**Recupero seconda prova intermedia di Matematica Applicata**

31 gennaio 2025

Compito numero 1

1. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad W = \begin{bmatrix} \beta & -1/2 & 1/2 \\ \beta & 1/2 & -1/2 \\ 0 & \beta & \beta \end{bmatrix},$$

   dove $\alpha$ e $\beta$ sono parametri reali. Dire per quali valori di $\alpha$ la matrice $A$ è non singolare e verificare che $\lambda = -\alpha$ è un autovalore di $A$ per ogni valore di $\alpha$. Determinare i valori di $\alpha$ che rendono $B$ l'inversa di $A$ e i valori di $\beta$ che rendono $W$ ortogonale. Assegnati ad $\alpha$ e $\beta$ i valori trovati, o uno di essi se non sono unici, si risolva nel modo più efficiente possibile, motivando la risposta, il sistema $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $M = AW$ e $\mathbf{b} = (1, 1, 0)^T$.

   *Soluzione.* La matrice $A$ è non singolare per $\alpha \neq 0, \pm\sqrt{2/3}$ e $\lambda = -\alpha$ è un autovalore per ogni $a \in \mathbb{R}$ perché $\det(A + aI) = 0$. La matrice $A$ è l'inversa di $B$ per $\alpha = 1$, $W$ è ortogonale per $\beta = \pm\sqrt{2}/2$ e

$$\mathbf{x} = (AW)^{-1}\mathbf{b} = W^T(B\mathbf{b}) = (0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)^T.$$

2. Assegnata la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & \alpha \end{bmatrix},$$

   dire per quali valori del parametro reale $\alpha$ la matrice $A$ risulta non singolare, per quali ha autovalori positivi e per quali il metodo di Jacobi applicato al sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (1, 2, 1)^T$, risulta convergente. Fissato, inoltre, $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterate $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ del metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 0)^T$.

   *Soluzione.* La matrice dei coefficienti è non singolare se $\alpha \neq 0, \pm\sqrt{2}$, non è simmetrica per alcun valore di $\alpha$, ha autovalori positivi se $\alpha > \sqrt{2}$. Il metodo di Jacobi converge per $\alpha < -\sqrt{2}$ oppure $\alpha > \sqrt{2}$. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [0, 1, 1]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [0, 3/2, 5/4]^T$.

3. Posto $\alpha = 1/2$ nella matrice $A$ dell'esercizio 2, calcolare la sua fattorizzazione $PA = LU$ ed utilizzarla per calcolare il determinante di $A$ e la prima colonna di $A^{-1}$.

   *Soluzione.*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -3/4 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 7/8 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^{-1}\mathbf{e}_1 = [6/7, 4/7, 8/7]^T, \quad \det(A) = -7/8.$$

4. Assegnato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_1 y_2 \\ y_2' = \frac{1}{4} y_2 - y_1 y_2 \\ y_1(0) = 2, \ y_2(0) = 1, \end{cases}$$

   utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 1$.

   *Soluzione.* $\boldsymbol{\eta}_1 = (2, \frac{1}{8})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{9}{8}, \frac{1}{64})^T$.

5. Identificare i due seguenti metodi alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{6} \left[ 5f(x_k, \eta_k) - \alpha f\left(x_k + 3\beta h, \eta_k + 3\beta h f(x_k, \eta_k)\right)\right],$$
$$\eta_{k+1} = 4\eta_k - \left(4 - \gamma^2\right) \eta_{k-1} + \frac{h}{2} \left[ f(x_k, \eta_k) + f(x_{k-1}, \eta_{k-1})\right].$$

   Dire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il primo metodo è stabile, per quali è convergente e per quali è del secondo ordine. Stabilire, inoltre, per quali valori di $\gamma \in \mathbb{R}$ il secondo metodo è stabile.

   *Soluzione.* Il primo metodo è monostep, esplicito, a due stadi. Pertanto è stabile per ogni valore di $\alpha$ e $\beta$. Esso è consistente, e quindi convergente, per $\alpha = -1$ e per ogni $\beta$, è di ordine 2 per $\alpha = -1$ e $\beta = 1$. Il secondo metodo è multistep, esplicito, a due passi. Esso non è stabile per alcun valore di $\gamma$.