Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

28 marzo 2025

Compito numero 1

1. Si determini la fattorizzazione $PA = LU$ della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix},$$

e la si usi per calcolare il determinante e le prime due colonne dell'inversa di A.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^{-1}\mathbf{e}_1 = [1/4, 1/2, -1/2]^T, \quad A^{-1}\mathbf{e}_2 = [1/2, 0, 0]^T \quad \det(A) = -16.$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 1 \\ \alpha & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e per quali è definita positiva. Si studi al variare del parametro α la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema. Posto $\alpha = 1$, si calcolino infine le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0\ 1\ 0]^T$.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\alpha \neq \pm\sqrt{3}$ ed è definita positiva se $-\sqrt{3} < \alpha < \sqrt{3}$. Il metodo di Jacobi converge per $-\sqrt{3} < \alpha < \sqrt{3}$. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [0, 1/2, 1/2]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [0, 1/2, 1/2]^T$.

3. Si classifichi il seguente schema alle differenze finite e si dica se il suo ordine di convergenza e consistenza è almeno 2

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{4}\left[f(x_k, \eta_k) + 3f\left(x_k + \frac{2}{3}h, \eta_k + \frac{2}{3}hf(x_k, \eta_k)\right)\right].$$

Considerato poi il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 3x - y, \quad x \in [0,3], \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

si calcoli la soluzione approssimata nel punto $x = 1$ mediante il metodo alle differenze introdotto in precedenza, nel caso in cui $h = \frac{1}{2}$.

Soluzione. Lo schema è monostep esplicito ed è consistente e convergente del secondo ordine. La soluzione approssimata nel punto $x = 1$ è $\boldsymbol{\eta}_2 = 25/16$, essendo $\boldsymbol{\eta}_1 = 1$.

4. Determinare la serie di Fourier della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3, & -3 \leq x < 0, \\ x + 3, & 0 \leq x < 3, \end{cases}$$

e dire se la serie è differenziabile termine a termine.

Soluzione. La serie è differenziabile termine a termine e risulta

$$S_f(x) = \frac{9}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{(k\pi)^2} \left((-1)^k - 1\right) \cos\left(\frac{k\pi}{3} x\right).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2x^2 + 3}\right\}, \quad \mathcal{F}\left\{\delta(x+3) * \mathrm{e}^{-|x|} \sin 3x\right\}.$$

dove il simbolo $*$ indica la convoluzione nel senso di Fourier e $H(x)$ è la funzione di Heaviside.

Soluzione.

$$F(k) = \frac{\pi\sqrt{6}}{6} e^{-\sqrt{3/2}|k-1|}, \qquad F(k) = -\mathrm{i}e^{3ik}\left[\frac{1}{1 + (k-3)^2} - \frac{1}{1 + (k+3)^2}\right].$$