

Nome e matricola:

Corso di studi:

Prova scritta di Matematica Applicata

16 giugno 2025

1. Assegnata la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & \alpha \end{bmatrix},$$

dire per quali valori del parametro reale α la matrice A risulta non singolare, per quali ha autovalori positivi e per quali il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$, risulta convergente. Fissato, inoltre, $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterate $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ del metodo di Jacobi applicato al sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 0)^T$.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\alpha \neq 0, \pm\sqrt{2}$ e ha autovalori positivi se $\alpha > \sqrt{2}$. Il metodo di Gauss-Seidel converge per $\alpha < -\sqrt{2}$ oppure $\alpha > \sqrt{2}$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [0, 0, 1]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [1/2, 1, 1/2]^T$.

2. Posto $\alpha = 1/3$ nella matrice A dell'esercizio 1, calcolare la sua fattorizzazione $PA = LU$ ed utilizzarla per calcolare il determinante di A e la prima colonna di A^{-1} .

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & -8/9 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1 \\ 0 & -1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 17/27 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^{-1}\mathbf{e}_1 = [24/17, 9/17, 27/17]^T, \quad \det(A) = -17/27.$$

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = y - 3xy', & x \in [\frac{1}{2}, 3] \\ y(\frac{1}{2}) = 1, y'(\frac{1}{2}) = -1 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 2$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{5}{8}, \frac{1}{8})^T$, $\boldsymbol{\eta}_3 = (\frac{11}{16}, \frac{5}{32})^T$.

4. Calcolare la serie di Fourier della seguente funzione e stabilire se essa è differenziabile termine a termine.

$$f(x) = x + 1, \quad x \in [-1/2, 1/2].$$

Soluzione.

$$y(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} \sin(2k\pi x).$$

La serie non è differenziabile termine a termine.

5. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{e^{-3ix}}{x^2 - 2x + 6} \right\}, \quad \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\sin(2k - 4)}{e^{ik}(k - 2)} \right\}.$$

Soluzione.

$$F(k) = \frac{\pi\sqrt{5}}{5} e^{-i(k+3)} e^{-\sqrt{5}|k+3|},$$

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{2i(x-1)} [H(x+1) - H(x-3)].$$