0.1 Equazioni integrali

Prima di discutere i problemi discreti, introduciamo una classe di problemi continui che costituisce la più importante fonte di problemi inversi.

Una **equazione integrale** è una equazione in cui la funzione incognita si trova sotto il segno di integrale. Ad esempio, le equazioni

$$\int_0^1 (x+1)\cos(x+y) f(x)\, dx = \frac{y+3}{y+1}, \qquad y \in [0,2], \tag{0.1}$$

$$f(y) + \int_0^1 (x+1) e^{x+y} f(x)\, dx = y, \qquad y \in [0,1], \tag{0.2}$$

$$f(y) + \int_0^y x^2 e^{x+y} f(x)\, dx = \sin(y+3), \qquad y \in [0,1], \tag{0.3}$$

dove $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ è la funzione incognita, sono tutti esempi di equazioni integrali perché la f da determinare è parte della funzione integranda.

Si parla di **equazioni integrali lineari** se l'incognita compare linearmente. Le equazioni (0.1)–(0.3) sono lineari, invece la sequente

$$f(y) + \int_0^1 (x+1) e^{x+y} (f(x))^2\, dx = y, \qquad y \in [0,1], \tag{0.4}$$

non lo è.

Una importante famiglia di equazioni integrali sono le **equazioni di Fredholm**. Queste sono lineari e sono caratterizzate dalla presenza di estremi di integrazioni fissati. Ad esempio le equazioni (0.1) e (0.2) sono di tipo Fredholm. Al contrario, la (0.3) non lo è, in quanto l'integrale è definito sull'intervallo $[0,y]$ e y non è fissata, essendo una variabile. Questa equazione rientra nella famiglia delle cosiddette **equazioni di Volterra**. In questo libro verranno trattate solo le equazioni di Fredholm.

In generale, le equazioni integrali si classificano in equazioni di prima e seconda specie.

Le **equazioni di Fredholm di seconda specie** sono caratterizzate dalla presenza della funzione incognita anche al di fuori dell'integrale, in un termine additivo. La forma generica è

$$f(y) + \int_a^b k(x,y) f(x)\, dx = g(y), \quad y \in [a,b], \tag{0.5}$$

dove f è la funzione incognita, a e b sono gli estremi di integrazioni e possono essere sia finiti che infiniti, k è una funzione nota detta *nucleo* dell'equazione integrale e g, anch'essa nota, rappresenta il *termine noto*.

Risolvere una equazione integrale di Fredholm di seconda specie significa determinare la funzione f che verifica l'identità (0.5).

Esempio 0.1 *L'equazione*

$$f(y) + \int_0^{\pi} (y^2 + x) \cos(y) f(x)\, dx = \cos y, \quad y \in [0, \pi],$$

è di Fredholm di seconda specie con nucleo $k(x, y) = (y^2 + x)\cos(y)$ e termine noto $g(y) = \cos(y)$. Un utile esercizio per lo studente è verificare che la funzione $f(x) = -\cos(x)$ è soluzione dell'equazione data.

Le **equazioni di Fredholm di prima specie** sono equazioni in cui la funzione incognita compare solo sotto il segno di integrazione. Si presentano nella forma

$$\int_a^b k(x, y) f(x)\, dx = g(y), \quad y \in [c, d], \tag{0.6}$$

dove, anche in questo caso, k è una funzione nota detta *nucleo* dell'equazione e g è il *termine noto*. L'intervallo di integrazione $[a, b]$ può essere finito o infinito così come quello della variabile esterna $y \in [c, d]$. L'intervallo $[c, d]$ può coincidere con $[a, b]$, ma anche essere diverso. Questa è una delle tante diversità tra le equazioni di prima e di seconda specie. In queste ultime, x e y appartengono allo stesso intervallo in virtù della presenza della funzione incognita f al di fuori dell'integrale.

Esempio 0.2 *L'equazione*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{y^2 \sin(x)}{2\pi - 4} f(x)\, dx = y^2, \quad y \in \mathbb{R},$$

è di Fredholm di prima specie con nucleo $k(x, y) = y^2 \sin(x)/(2\pi - 4)$ e termine noto $g(y) = y^2$. Un utile esercizio per lo studente è verificare che $f(x) = 2x^2$ è soluzione dell'equazione data.

Esempio 0.3 *La trasformata di Fourier di una funzione f può essere vista come una particolare equazione di prima specie con nucleo $k(x, y) = e^{-\mathrm{i}yx}$, se ne è noto il risultato $F(y)$. Ad esempio,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{i}yx} f(x)\, dx = \frac{1}{3 + \mathrm{i}y}, \qquad y \in \mathbb{R},$$

ha come soluzione $f(x) = e^{-3x} H(x)$.

Esempio 0.4 *Anche la convoluzione fornisce un'importante esempio di equazione integrale*

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(y-x)f(x)\,dx = g(y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

In questo caso $k(y-x)$ *è il nucleo, detto convolutorio,* g *il termine noto e* f *la funzione incognita. Risolvere l'equazione è spesso descritto come un problema di* deconvoluzione*.*

Le equazioni integrali di prima specie, a differenza di quelle di seconda specie, sono un classico esempio di problemi mal posti, il ché complica il loro trattamento numerico. Essendo tali, possono ad esempio *non ammettere soluzione*. L'equazione

$$\int_{-1}^{1} x^2 y f(x)\,dx = g(y)$$

ammette soluzione solo se il termine noto g contiene il monomio y, altrimenti l'identità non è sicuramente verificata. Inoltre, possono avere *infinite soluzioni*. L'equazione

$$\int_{0}^{2\pi} x(y+1)f(x)\,dx = \frac{8}{3}\pi^3(y+1),$$

ammette come soluzione $f(x) = x$, ma anche qualsiasi funzione del tipo

$$f(x) = x + \alpha\left(\sin(x) + \frac{1}{x}\right),$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, è una soluzione della stessa equazione, essendo

$$\int_{0}^{2\pi} \alpha(x\sin x + 1)\,dx = 0.$$

Il primo membro della equazione (0.6) può essere visto come un operatore lineare che trasforma la funzione f in una funzione g, e l'equazione diventa

$$Kf = g. \tag{0.7}$$

L'esistenza della soluzione è collegata alla condizione $g \in \mathcal{R}(K)$, mentre l'unicità è garantita dalla presenza di un nucleo banale, ossia $\mathcal{N}(K) = \{0\}$, dove 0 rappresenta la funzione nulla.