FORMA NORMALE DI JORDAN

$\forall A$ $n \times n$ $\exists X$ non singolare tale che

$$X^{-1} A X = J = \mathrm{diag}\left(J_{k_1}(\lambda_1), J_{k_2}(\lambda_2), \ldots, J_{k_\ell}(\lambda_\ell)\right)$$

con $k_1 + k_2 + \ldots + k_\ell = n$, $J_1(\lambda) = \lambda$ se $k=1$, mentre per $k>1$

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{k \times k}$$

blocchi di JORDAN

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ autovalori distinti,

Si ha $m \leq \ell \leq n$, cioè un autovalore può avere più di un blocco di Jordan.

Se $k_i = 1$ λ_i è non difettivo

Se $k_i > 1$ λ_i è difettivo

__Esempi__

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 3 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 3 & 1 & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 3 & 1 & \\ & & & & 3 & 1 \\ & & & & & 3 \end{bmatrix}$$

diagonalizzabile

non difettivi

difettivi

Partizioniamo X a blocchi coerentemente con J.

$$A\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{J_{k_1}(\lambda_1)} & & & \\ & \boxed{J_{k_2}(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_{k_e}(\lambda_e)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} AX_1 & AX_2 & \cdots & AX_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 J_{k_1}(\lambda_1) & X_2 J_{k_2}(\lambda_2) & \cdots & X_e J_{k_e}(\lambda_e) \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad AX_i = X_i J_{k_i}(\lambda_i)$$

<u>Sia $k_1 = 1$</u> $\quad Ax_1 = \lambda_1 x_1 \quad$ autovettore

<u>Siano $\lambda_1 = \lambda_2$ e $k_1 = k_2 = 1$</u>

$Ax_1 = \lambda_1 x_1$ $\quad$ 2 autovettori
$Ax_2 = \lambda_1 x_1$ $\quad$ indipendenti

<u>λ_1 è non difettivo</u>

<u>Sia $k_1 = 4$</u>

$$A\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & 1 & \\ & & \lambda_1 & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$Ax_1 = \lambda_1 x_1$ $\quad$ <u>auto vettore</u>

$$\left.\begin{aligned} Ax_2 &= x_1 + \lambda_1 x_2 \\ Ax_3 &= x_2 + \lambda_1 x_3 \\ Ax_4 &= x_3 + \lambda_1 x_4 \end{aligned}\right\} \quad x_2, x_3, x_4 \text{ autovettori generalizzati}$$

x_1, x_2, x_3, x_4 $\quad$ <u>CATENA DI JORDAN</u>

Segue che

$$(A-\lambda_1 I)x_1 = 0$$
$$(A-\lambda_1 I)x_2 = x_1 \quad \longrightarrow \quad (A-\lambda_1 I)^2 x_2 = 0$$
$$(A-\lambda_1 I)x_3 = x_2 \quad\quad (A-\lambda_1 I)^3 x_3 = 0$$
$$(A-\lambda_1 I)x_4 = x_3 \quad\quad (A-\lambda_1 I)^4 x_4 = 0$$

x_4 è il <u>generatore</u>, e perché da lui si trovano gli altri per prodotto per $(A-\lambda_1 I)$, l'ultimo è un autovettore.

μ_i <u>molteplicità algebrica</u>: quante volte λ_i compare in J (quante volte è radice di $p_n(\lambda)=0$)

ρ_i <u>molteplicità geometrica</u>: numero di blocchi di Jordan associati a λ_i (numero di autovettori indipendenti)

<u>Th</u> Una matrice è diagonalizzabile $\Longleftrightarrow \mu_i = \rho_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$

<u>Th</u> $\exists$ una base di autovettori e autovettori generalizzati

<u>La costruzione è instabile</u>

<u>ES.</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix}$

<u>$\varepsilon = 0$</u> $\longrightarrow$ $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(= A)$ non diagonalizzabile

<u>$\varepsilon \neq 0$</u> $\longrightarrow$ $\lambda_i = 1 \pm \sqrt{\varepsilon}$ $\quad J = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix}$ diagonalizzabile!!