

PROGRAMMA DEL CORSO DI
ALGORITMI NUMERICI E APPLICAZIONI

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

A.A. 2019/2020 - DOCENTE: PROF. GIUSEPPE RODRIGUEZ

1. **Introduzione.** Richiami argomenti di base. Problemi ben posti, condizionamento, metodi diretti ed iterativi per sistemi lineari, interpolazione e approssimazione. Aritmetica di macchina, condizionamento delle operazioni elementari, cancellazione. Approssimazione polinomiale nel senso dei minimi quadrati. Interpretazioni alternative del prodotto matriciale: inner and outer product. BLAS. Calcolo della matrice inversa. Prodotti matriciali a blocchi. Il teorema spettrale. Fattorizzazione spettrale. Matrici ortogonali. Approssimazione a rango basso, ϵ -rango. Matrice di adiacenza di un grafo e significato delle sue potenze. Applicazione: analisi di reti complesse.
2. **Generalità sui problemi ai minimi quadrati.** Sistemi lineari sovradeterminati e sottodeterminati a rango pieno. Il caso a rango non pieno. Range e nucleo di una matrice. Formulazione di un problema ai minimi quadrati lineare (LSP) sovradeterminato e risoluzione con le equazioni normali. Caratterizzazione delle soluzioni. Matrice pseudo-inversa. Fattorizzazioni di Cholesky e QR. Decomposizione ortogonale di uno spazio. LSP duale per sistemi sottodeterminati. Soluzione di minima norma. Equazioni normali del secondo tipo.
3. **Metodi numerici diretti.** Fattorizzazione di Cholesky, implementazione e uso per la soluzione delle equazioni normali. Fattorizzazione QR e applicazione ad un LSP. Matrici elementari di Householder e di Givens e corrispondenti fattorizzazioni QR. Fattorizzazione QR compatta.
4. **Calcolo di autovalori e autovettori.** Definizioni base. Matrici simili, diagonalizzabilità, fattorizzazione spettrale. Forma canonica di Schur. Matrici difettive. Matrici normali e unitariamente diagonalizzabili. Teorema di Bauer-Fike. Il metodo delle potenze e delle potenze inverse. Traslazione dello spettro. Matrice compagna e calcolo delle radici di un polinomio. Metodi iterativi e matrici sparse. Algoritmo QR per il calcolo degli autovalori. Accelerazione della convergenza del metodo. Passaggio in forma di Hessenberg. Applicazione: eigenvector centrality per reti complesse, indici di valutazione della produzione scientifica.
5. **Decomposizione ai valori singolari (SVD).** Definizione di valori e vettori singolari. Forma generale della fattorizzazione. Esistenza della SVD. Analogie con gli autovalori. Cenni sul calcolo semplificato del sistema singolare. Approssimazioni a rango basso e principal component analysis. I quattro sottospazi fondamentali associati ad una matrice. Espressione della soluzione di un sistema omogeneo. Stabilità dei valori singolari. Migliore approssimazione di una matrice. Applicazione alla risoluzione di sistemi e LSP. Rappresentazione della pseudo-inversa e proprietà. SVD troncata ed errore di approssimazione. Teoremi di Weyl e di Courant-Fisher. Stabilità dei valori singolari. Definizione generale di numero di condizionamento. Condizioni di Penrose. Cenni sull'algoritmo di Golub-Reinsch per il calcolo della SVD. Applicazione: photometric stereo nella computer vision.
6. **Metodi numerici iterativi.** Generalità sui metodi iterativi. Metodi di Richardson. Precondizionamento. Fattorizzazione incomplete LU e di Cholesky. I metodi del gradiente e del gradiente coniugato. Il metodo CGLS. Metodi di proiezione in spazi di Krylov. Algoritmo di Lanczos. Breakdown e riortogonalizzazione. Risoluzione di un sistema lineare col metodo di Lanczos. Cenni sui metodi di Arnoldi e di Golub-Kahan.
7. **Laboratorio Matlab.** Implementazione ottimizzata di alcuni degli algoritmi studiati: Cholesky, Householder, Givens, gradiente coniugato, preconditionamento, metodi iterativi, etc. Sperimentazione numerica sulla performance degli algoritmi.

Testi consigliati