Programma del corso di
ALGORITMI NUMERICI E APPLICAZIONI
Corso di Laurea magistrale in Matematica
A.A. 2021/2022 - docente: prof. Giuseppe Rodriguez

1. **Introduzione.** Richiami argomenti di base. Problemi ben posti, condizionamento, metodi diretti ed iterativi per sistemi lineari, interpolazione e approssimazione. Aritmetica di macchina, condizionamento delle operazioni elementari, cancellazione. Approssimazione polinomiale nel senso dei minimi quadrati. Interpretazioni alternative del prodotto matriciale: inner and outer product. BLAS. Calcolo della matrice inversa. Prodotti matriciali a blocchi. Il teorema spettrale. Fattorizzazione spettrale. Matrici ortogonali. Approssimazione a rango basso, ϵ-rango. Matrice di adiacenza di un grafo e significato delle sue potenze. Applicazione: analisi di reti complesse.

2. **Generalità sui problemi ai minimi quadrati.** Sistemi lineari sovradeterminati e sottodeterminati a rango pieno. Il caso a rango non pieno. Range e nucleo di una matrice. Formulazione di un problema ai minimi quadrati lineare (LSP) sovradeterminato e risoluzione con le equazioni normali. Caratterizzazione delle soluzioni. Matrice pseudo-inversa. Modello statistico lineare standard. Fattorizzazioni di Cholesky e QR. Decomposizione ortogonale di uno spazio. LSP duale per sistemi sottodeterminati. Soluzione di minima norma. Equazioni normali del secondo tipo.

3. **Metodi numerici diretti.** Fattorizzazione di Cholesky, implementazione e uso per la soluzione delle equazioni normali. Fattorizzazione QR e applicazione ad un LSP. Matrici elementari di Householder e di Givens e corrispondenti fattorizzazioni QR. Fattorizzazione QR compatta. Metodo di Gram-Schmid classico e modificato.

4. **Calcolo di autovalori e autovettori.** Definizioni base. Matrici simili, diagonalizzabilità, fattorizzazione spettrale. Forma canonica di Schur. Matrici difettive. Matrici normali e unitariamente diagonalizzabili. Teorema di Bauer-Fike. Il metodo delle potenze e delle potenze inverse. Traslazione dello spettro. Matrice compagna e calcolo delle radici di un polinomio. Metodi iterativi e matrici sparse. Algoritmo QR per il calcolo degli autovalori. Accelerazione della convergenza del metodo. Passaggio in forma di Hessenberg. Forma canonica di Jordan. Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. Matrici riducibili. Teoremi di Gershgorin. Applicazione: eigenvector centrality per reti complesse.

5. **Decomposizione ai valori singolari (SVD).** Definizione di valori e vettori singolari. Forma generale della fattorizzazione. Esistenza della SVD. Analogie con gli autovalori. Cenni sul calcolo semplificato del sistema singolare. Approssimazioni a rango basso e principal component analysis. I quattro sottospazi fondamentali associati ad una matrice. Espressione della soluzione di un sistema omogeneo. Stabilità dei valori singolari. Migliore approssimazione di una matrice. Applicazione alla risoluzione di sistemi e LSP. Rappresentazione della pseudo-inversa e proprietà. SVD troncata. Condizioni di Penrose. Proiettori ortogonali sui sottospazi fondamentali. Costruzione di fattorizzazioni a rango fissato mediante la SVD ed errore di approssimazione. Teoremi di Weyl e di Courant-Fisher. Stabilità dei valori singolari. Definizione generale di numero di condizionamento. Cenni sull'algoritmo di Golub-Reinsch per il calcolo della SVD. Applicazione: photometric stereo e camera calibration nella computer vision.

6. **Metodi numerici iterativi.** Generalità sui metodi iterativi. Metodi di Richardson. Precondizionamento. Fattorizzazione incomplete LU e di Cholesky. I metodi del gradiente e del gradiente coniugato. Criteri di stop. Il metodo CGLS. Metodi di proiezione in spazi di Krylov. Soluzione del sistema nel caso di breakdown. Il metodo del gradiente coniugato come metodo di Krylov. Algoritmo di Lanczos. Breakdown, riortogonalizzazione e restart. Risoluzione di un sistema lineare col metodo di Lanczos. Calcolo degli autovalori estremali e di una funzione di matrice. Cenni sui metodi di Arnoldi e di Golub-Kahan.

7. **Approssimazione di funzioni e formule di quadratura.** Migliore approssimazione in uno spazio di Hilbert. Prodotti scalari pesati. Caratterizzazione della soluzione. Equazioni normali. Matrice di Gram. Momenti e coefficienti di Fourier. Polinomio di migliore approssimazione. Formule di quadratura interpolatorie. Funzioni peso e integrali con singolarità. Polinomi ortogonali. Formule di ricorrenza. Proprietà. Formule Gaussiane. Calcolo di pesi e nodi. Polinomi ortogonali classici.

8. **Laboratorio Matlab.** Calcolo matriciale. Creazione di un problema modello con soluzione assegnata. Implementazione ottimizzata di alcuni degli algoritmi studiati: fattorizzazione QR, gradiente coniugato, precondizionamento, metodi iterativi, polinomi ortogonali e formule di quadratura, etc. Sperimentazione numerica sulla performance degli algoritmi.

Testi consigliati

[1] G. Rodriguez. *Algoritmi Numerici.* Pitagora Editrice, Bologna, 2008.

[2] Å. Björck. *Numerical Methods for Least Squares Problems.* SIAM, Philadelphia, 1996.

[3] G. W. Stewart. *Matrix Algorithms. Volume 1: Basic Decompositions.* SIAM, Philadelphia, 1998.

[4] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix Computations.* The John Hopkins University Press, Baltimore, third edition, 1996.

[5] W. L. Briggs and V. E. Henson. *The DFT, An Owner's Manual for the Discrete Fourier Transform.* SIAM, Philadelphia, 1995.

[6] L. N. Trefethen and D. Bau III. *Numerical Linear Algebra.* SIAM, Philadelphia, 1997.

[7] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri. *Matematica Numerica.* Springer, Milano, 2000. Seconda edizione.

[8] V. Comincioli. *Analisi Numerica Metodi Modelli Applicazioni.* McGraw-Hill, Milano, 1995.