

Elaborazione di segnali mediante DFT

Alessandro Gallo - Matr. 27154

Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez

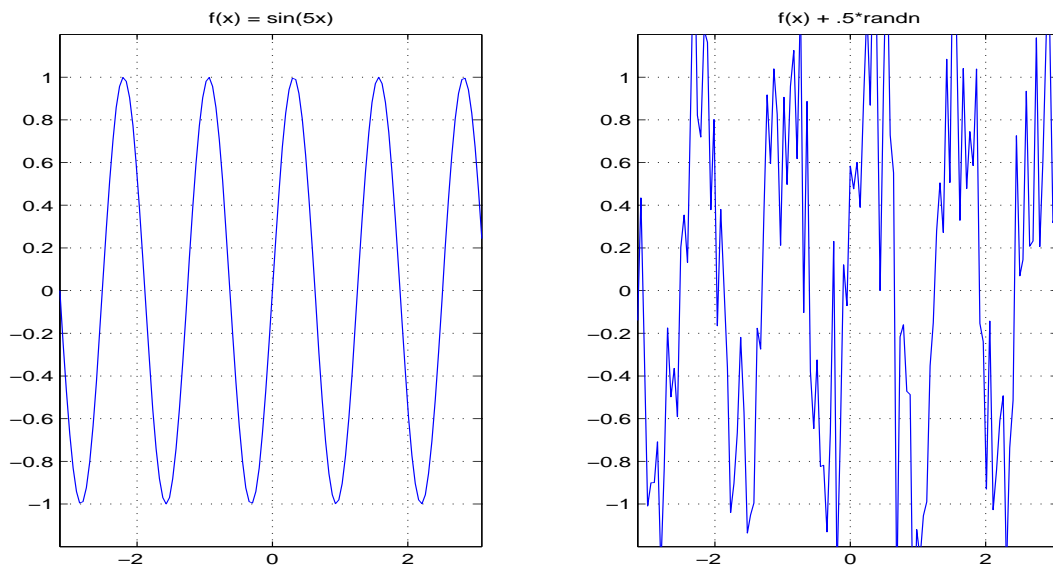


Figura 1: Segnale sinusoidale, puro e con rumore gaussiano sovrapposto

1 Elaborazione di segnali 1D mediante DFT

Consideriamo un segnale sinusoidale $f(x) = \sin(5x)$. L'andamento di questo segnale è rappresentato a sinistra in figura 1. Questa sinusoide potrebbe rappresentare ad esempio l'andamento di un certo fenomeno fisico che stiamo osservando e che intendiamo descrivere attraverso una relazione matematica, e quindi supporremo che questa sia l'uscita prodotta dal nostro strumento di misura, tramite il quale osserviamo il fenomeno.

Un tipico problema di questo approccio sta nel fatto che, a causa dei disturbi ai quali è sottoposto il sistema sotto misura (disturbi che si manifestano sotto forma di rumore) ciò che vediamo attraverso il nostro strumento potrebbe essere un segnale con un andamento come quello riportato a destra in figura 1, che rappresenta il segnale utile $f(x)$ al quale è stato sovrapposto del rumore gaussiano. Più in generale, lo stesso andamento potrebbe essere rappresentativo di un segnale utile sporcato dal rumore attraverso elaborazioni successive. In entrambi i casi, desideriamo ripulire il segnale dai disturbi che inevitabilmente si sovrappongono ad esso durante il suo trattamento. Risulta evidente che, osservando l'andamento del segnale nel dominio del tempo, risulta difficile rendersi conto che il segnale utile è una sinusoide. In realtà, se anche il tipo di andamento può essere intuito, è particolarmente difficile riuscire ad esprimere in forma matematica ciò che si osserva.

Proviamo allora a lavorare sul contenuto in frequenza del segnale rumoroso, calcolando modulo e fase del suo spettro. Il calcolo dello spettro del segnale rumoroso

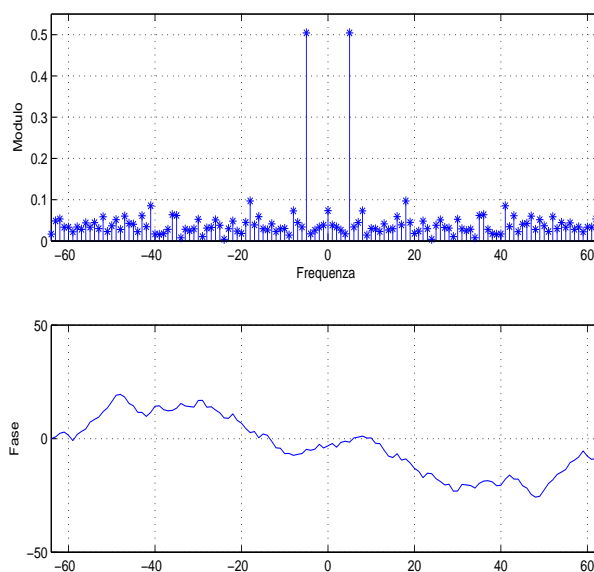


Figura 2: Spettro del segnale rumoroso

viene fatto campionando il segnale nel dominio del tempo e calcolando la trasformata di Fourier discreta (DFT) sui campioni prelevati. Per il calcolo della DFT si utilizza in genere l'algoritmo FFT (Fast Fourier Transform), che fornisce il risultato in un tempo $O(n \log n)$ se il numero n di campioni è una potenza di 2.

I risultati dell'elaborazione nel dominio della frequenza sono mostrati in figura 2. Interessiamoci ora al diagramma del modulo dello spettro del segnale rumoroso. Innanzitutto osserviamo che il diagramma risulta simmetrico rispetto all'origine dell'asse delle frequenze. Questa è una conseguenza del fatto che una DFT reale presenta la proprietà di coniugazione. La parte significativa del diagramma è quindi quella situata nel semipiano destro.

Notiamo che fra le componenti in frequenza spicca una componente di ampiezza circa 0.5, mentre le altre componenti sono distribuite su tutte le altre frequenze, con ampiezze per lo più simili che non superano 0.1 circa. Ora, poichè lo spettro di una sinusoide pura della forma $s(x) = \sin(\omega x)$ è proprio la componente di valore ω sull'asse delle frequenze (più precisamente parliamo della pulsazione ω , che è legata alla frequenza f dalla nota relazione $\omega = 2\pi f$), cioè l'armonica alla frequenza fondamentale, possiamo pensare di imputare le altre componenti al rumore e tenere come appartenente al segnale utile quella di valore 5 in frequenza. Quello che resta da fare a questo punto è filtrare il rumore, cioè annullare tutte le componenti al di fuori di quella utile. Tipicamente questo risultato si ottiene filtrando il segnale rumoroso. Il filtro ha proprio il compito di far passare le frequenze utili e tagliare quelle che non interessano. Nel nostro caso, decidiamo di filtrare tutte le componenti di ampiezza minore di un certo valore, ad esempio 0.1.

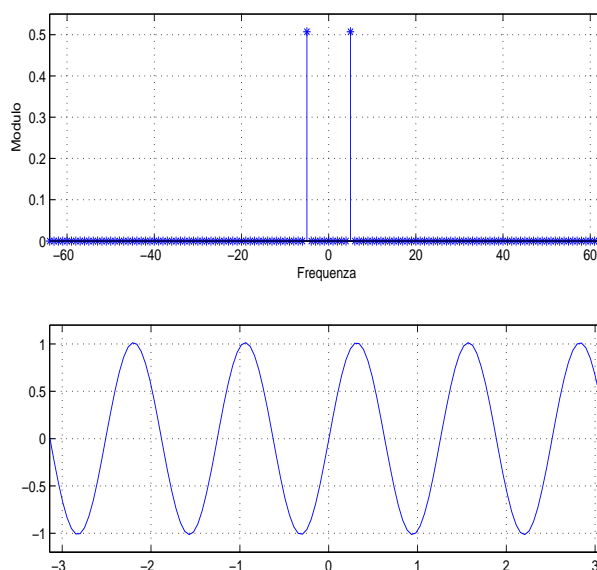


Figura 3: Filtraggio del segnale rumoroso

Il risultato del filtraggio delle componenti indesiderate è mostrato in alto in figura 3. Come si può notare, è rimasta unicamente la componente utile di valore 5 in frequenza. A questo punto, possiamo invertire il procedimento e tornare al dominio del tempo, tramite il calcolo della DFT inversa. Ciò che si ottiene è il segnale riportato in basso in figura 3. Si vede molto bene che il segnale ottenuto è la sinusoide di partenza. Questo semplice esempio mostra come l'elaborazione del segnale nel dominio della frequenza, attraverso l'utilizzo della DFT, permetta di ripulire un segnale utile dal rumore.

Ovviamente i segnali con i quali si ha a che fare nella pratica sono molto più complessi e hanno un contenuto utile in frequenza molto più vario. Inoltre, spesso non si riesce a distinguere nettamente quali sono le componenti da preservare e quali quelle da filtrare come rumore. La conseguenza di questo fatto è che il segnale ripulito sarà una approssimazione più o meno buona del segnale originario, a seconda del tipo di rumore presente. Sono inoltre da tenere in conto gli effetti dovuti alla finestratura del segnale, cioè al modo in cui preleviamo i campioni per l'elaborazione in frequenza tramite la DFT, fatto che di per sé introduce delle componenti armoniche indesiderate tagliando in alcuni casi anche quelle utili. Di seguito, presentiamo due esempi di segnali più complessi. A questi segnali sarà prima sovrapposto del rumore gaussiano, poi attraverso l'elaborazione in frequenza si tenterà di ripulire lo spettro dalle componenti indesiderate. In seguito, tramite la DFT inversa, si riporterà il segnale filtrato nel dominio del tempo e lo si confronterà con quello originale.

Il primo esempio è un segnale trigonometrico, della forma $f(x) = \sin(5x) +$

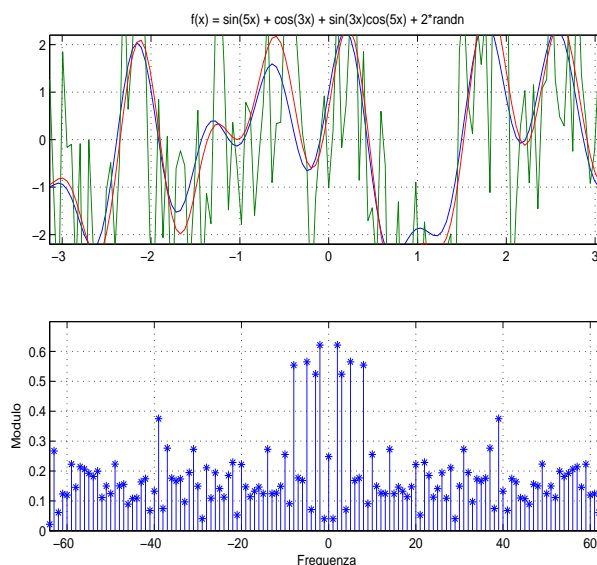


Figura 4: Segnale trigonometrico

$\cos(3x) + \sin(3x) \cos(5x)$. Al segnale è stato sovrapposto un rumore gaussiano abbastanza pesante, di ampiezza 2. Come risultato, si ha che lo spettro del segnale rumoroso presenta le componenti dovute al rumore di ampiezza simile a quelle del segnale originario. In realtà le componenti utili fondamentali sono abbastanza distinguibili dalle altre. Ci sono però alcune componenti utili a frequenza più elevata che si mischiano con quelle dovute al rumore. Nel filtraggio che faremo, un filtraggio che consiste unicamente nel tagliare le componenti in frequenza di ampiezza minore di un certo valore (nel nostro caso 0.4), verranno tagliate anche alcune componenti utili, per cui il segnale ripulito non sarà uguale al segnale originario ma sarà una sua approssimazione. In figura 4, nella quale è rappresentato il filtraggio, il segnale in blu è il segnale originario puro, il segnale in verde è quello col rumore gaussiano sovrapposto mentre il segnale in rosso è il risultato del filtraggio. Si nota chiaramente come il segnale ripulito si discosta da quello originario, anche se le pesanti oscillazioni che lo sporcavano, dovute al rumore, sono state filtrate. Il secondo esempio è relativo ad un'onda quadra, quindi un segnale decisamente più complesso dei precedenti, e dunque con un contenuto utile in frequenza più ricco. Anche in questo caso il segnale è stato sporcato con del rumore gaussiano di ampiezza 0.2. Lo spettro del segnale rumoroso è rappresentato in basso nella figura 5. Le componenti utili sono presenti su tutto il range di frequenze e hanno ampiezza variabile, quindi il segnale che otterremo risentirà abbastanza pesantemente del filtraggio (sono state eliminate le componenti di ampiezza minore di 0.15) e si discosterà ancora di più da quello originario. Ancora una volta il segnale in blu è l'onda quadra di partenza, quello in verde è il segnale sporcato dal rumore

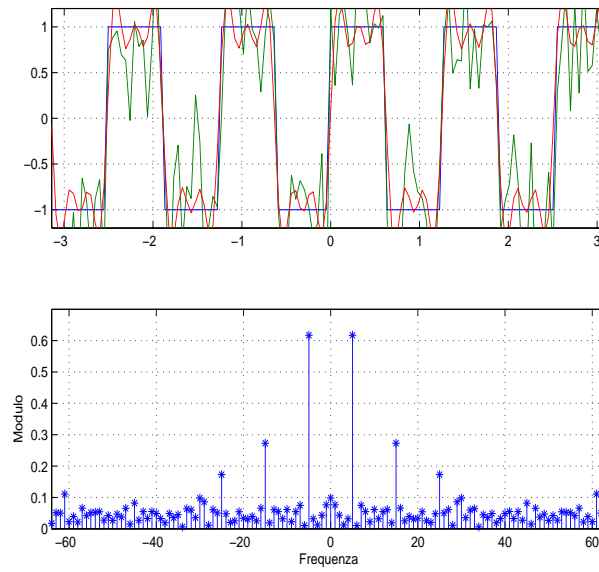


Figura 5: Onda quadra

mentre quello in rosso è il segnale ripulito, che sebbene non sia molto fedele a quello di partenza, non presenta più, anche in questo caso, le oscillazioni molto ampie dovute alla presenza del rumore.