Corso della Scuola di Dottorato in Ingegneria Industriale:
"Elementi di Analisi Funzionale e Matematica Numerica"

Tesina di Manuela Di Mauro

Decomposizione ai valori singolari classica e regolarizzata: esempio applicato ad un test per la ricostruzione tomografica

Decomposizione ai valori singolari classica e regolarizzata: esempio applicato ad un test per la ricostruzione tomografica

La decomposizione ai valori singolari (SVD) è una delle decomposizioni più importanti del calcolo matriciale. Dietro alla sua apparente semplicità si nasconde la capacità di risolvere moltissimi problemi, sia in algebra lineare, sia in molti altri ambiti. La determinazione pratica del rango di una matrice, la risoluzione del problema lineare dei minimi quadrati, la ricostruzione di immagini sfuocate ed affette da rumore sono solo alcuni degli esempi in cui la SVD riveste un ruolo fondamentale.
La fattorizzazione SVD è un metodo molto comodo per risolvere problemi mal posti, ossia in cui la matrice dei coefficienti non risulti essere quadrata.
Nel caso della tomografia, ad esempio, il sistema risulta essere un sistema con un numero maggiore di equazioni rispetto al numero di incognite. Il sistema tomografico, infatti, assume la forma:

$$M\,s = t$$

Dove:

$$M = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{m1} & l_{m2} & \dots & l_{mn} \end{pmatrix}$$

è la matrice delle lunghezze, di dimensione *mxn* dove *m* è il numero dei raggi (numero delle eccitazioni per numero dei sensori) mentre *n* è il numero totale delle celle in cui è discretizzato il dominio.

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \dots \\ s_n \end{pmatrix}$$

è il vettore delle lentezze *nx1*

$$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \dots \\ t_n \end{pmatrix}$$

è il vettore dei tempi misurati dai sensori di dimensione *mx1*

In cui *m* è sempre molto maggiore di *n*.
Pertanto il sistema, dopo la fattorizzazione SVD diventa:

$$U\,S\,V'\,s = t$$

E sarà risolto come:

$s = V\, S'\, U'\, t$

La fattorizzazione SVD regolarizzata, invece, è una variante della fattorizzazione SVD in cui sono eliminate le righe e le colonne delle matrici S, U e V che si suppone creino malcondizionamento nella soluzione. Questo fattore è infatti inserito dai valori singolari nulli e molto piccoli nella matrice S. Pertanto, costruendo una matrice S_1 troncata di dimensioni *a x a* dove *a = m - numero valori singolari eliminati*, il sistema diventerà:

$$U^{nxa}\, S^{axa}\, V'^{axn}\, s^{nx1} = t^{ax1}$$

Il risultato di questa regolarizzazione porta ad un problema il cui condizionamento è migliore, dato che la matrice S non è più mal condizionata, essendo una matrice a rango pieno con valori in diagonale non piccoli.
Nella figura 1 si può osservare la differenza nei risultati fra l'utilizzo o meno della regolarizzazione in caso di problema tomografico. Nel caso della soluzione regolarizzata, il problema è risolto con un miglioramento dell'errore globale del 20% come parametro di cut off dei valori singolari 0.01.

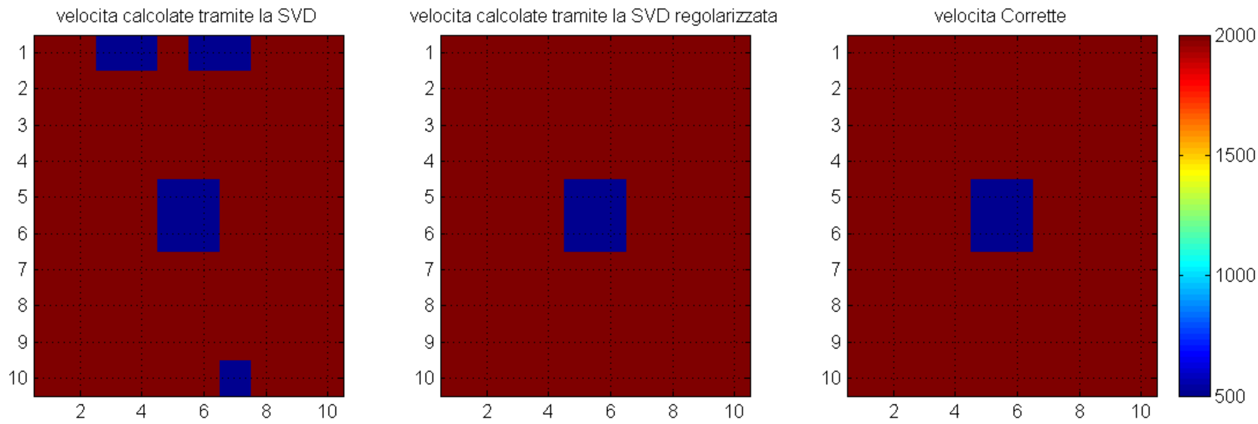

Figura 1

E' molto importante nell'utilizzo di ogni tipo di regolarizzazione la scelta del parametro di regolarizzione stessa. Nel caso della SVD, ad esempio, tagliare eccessivamente i valori singolari può portare ad un allontanamento dalla soluzione reale, eliminando valori che contribuiscono alla soluzione, nonostante il valore del condizionamento della matrice S sia migliore.
In figura 2 si può infatti notare il variare dell'errore all'aumentare della soglia di cut off dei valori singolari: tale errore aumenta a partire da un certo punto in poi del valore di soglia, mentre il condizionamento della matrice S continua a scendere (figura 3).

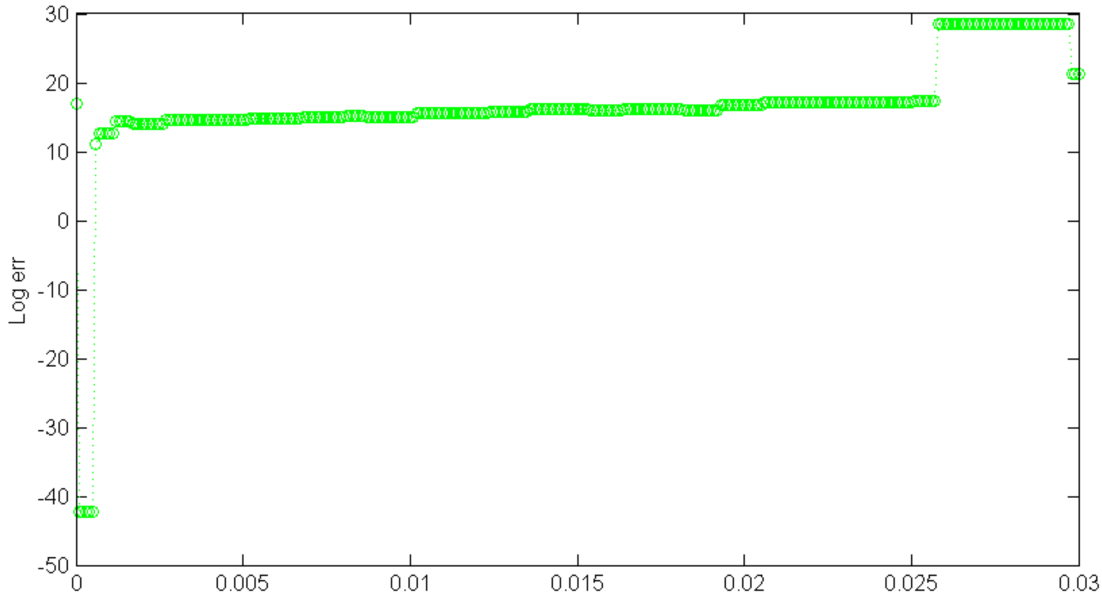

Figura 2: Valore dell'errore al crescere della soglia di cut off per i valori singolari

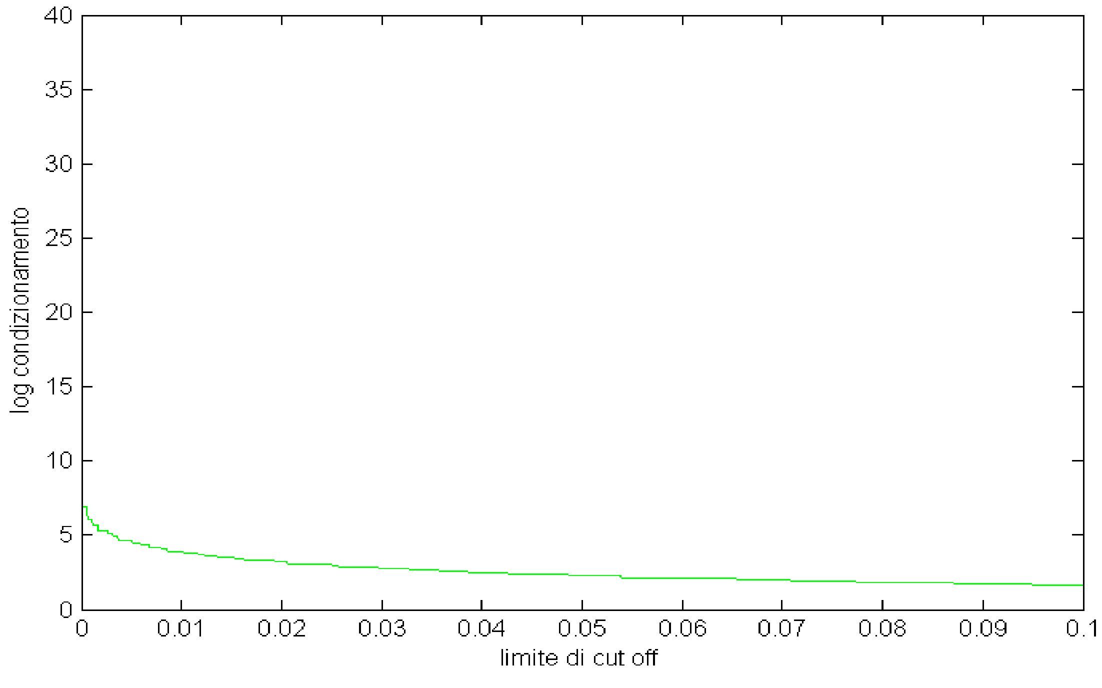

Figura 3: Valore del condizionamento della matrice S al crescere della soglia di cut off dei valori singolari