Anno Accademico 2006-2007
Metodi iterativi per la risoluzione di sistemi lineari e non-lineari
Numerical linear algebra: tools and methods

Esercitazione

S. D'ALESIO, A. MEDDA, C. PANI

Docenti: Prof. C. Brezisnki, Prof. G. Rodriguez, Prof. S. Seatzu

Dipartimento di Ingegneria Meccanica
Università degli Studi Cagliari
Piazza D'Armi, 09123 Cagliari ITALIA

Indice

Elenco delle figure

Capitolo 1

Esercizio 1

In questo primo capitolo viene proposta la risoluzione di una equazione di tipo ellittico per via numerica e viene fatto un confronto con la soluzione analitica.

Indice

1 Definizione dell'equazione.

Dato il problema differenziale:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 \leqslant x, y \leqslant \frac{\pi}{2} \\ u(x,0) = 4e^{-3x}, & u(x, \frac{\pi}{2}) = 0 \\ u(0,y) = 4\cos 3y, & u(\frac{\pi}{2}, y) = 4e^{-\frac{3}{2}}\cos 3y \end{cases}$$

è noto che la soluzione analitica di tale problema è:

$$u(x,y) = 4e^{-3x}\cos 3y \tag{1.1}$$

2 Ricerca soluzione numerica

Tale problema differenziale è di tipo ellittico. Per affrontarlo da un punto di vista numerico, verrà utilizzato il metodo delle differenze centrali.

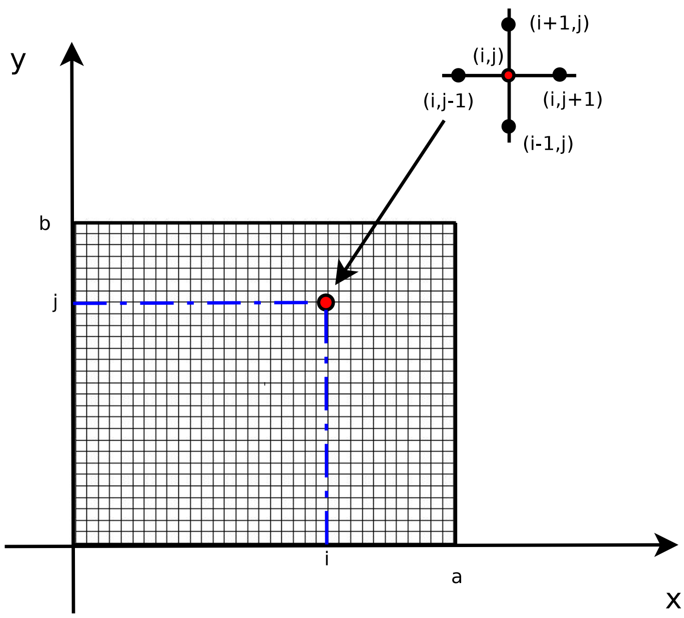

Figura 1.1: Schema del metodo di discretizzazione a 5 punti.

Utilizzando il metodo di discretizzazione a 5 punti [1], come quello illustrato in FIG.1.1, e ipotizzando per semplicità una reticolazione con nodi equidistanti in ciascuno dei due intervalli $[0,a]$ e $[0,b]$, si ottengono i nodi (x_i, y_j). Pertanto si può scrivere:

$x_i = a + ih, \qquad i = 0, 1, ..., n+1, \qquad \text{dove } h = \frac{a-0}{n+1}$

$y_j = b + jk, \qquad j = 0, 1, ..., m+1, \qquad \text{dove } k = \frac{b-0}{m+1}$

Discretizzando il problema differenziale con lo schema a 5 punti e collocando l'equazione differenziale nei punti interni, si ottiene il sistema:

$$\begin{aligned}\frac{u_{i-1,j}-2u_{i,j}+u_{i+1,j}}{h^2}+\frac{u_{i,j-1}-2u_{i,j}+u_{i,j+1}}{k^2}+p_{i,j}\frac{u_{i+1,j}-2u_{i-1,j}}{2h}\\ +q_{i,j}\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j-1}}{2k}+r_{i,j}u_{i,j}+s_{i,j}=0\end{aligned} \tag{1.2}$$

per $i = 0, 1, ..., n$ e $j = 0, 1, ..., m$.

Ordinando i termini $u_{i,j}$ per linee (per j crescente, e a parità di j per i crescente), si ottiene il seguente sistema lineare:

$$\begin{aligned}h^2(2-kq_{i,j})u_{i,j-1}+k^2(2-hp_{i,j})u_{i-1,j}-2[(h^2+k^2)-h^2k^2r_{i,j}]u_{i,j}\\ +k^2(2+hp_{i,j})u_{i+1,j}+h^2(2+kq_{i,j})u_{i,j+1}=-2h^2k^2s_{i,j}\end{aligned} \tag{1.3}$$

sempre per $i = 0, 1, ..., n$, e $j = 0, 1, ..., m$.

Nel nostro caso $r_{i,j} = 0$, $q_{i,j} = 0$ e $p_{i,j} = 0$ per cui l'eq. (1.3) diventa:

$$u_{i,j}=\frac{k^2(u_{i-1,j}+u_{i+1,j})+h^2(u_{i,j-1}+u_{i,j+1})}{2(h^2+k^2)}=\frac{u_{i-1,j}+u_{i+1,j}+u_{i,j-1}+u_{i,j+1}}{4} \tag{1.4}$$

imponendo $h = k$.

È noto che l'errore commesso utilizzando una discretizzazione a 5 punti è un $O(h^2 + k^2)$, ovvero che aumentando il numero di suddivisioni del reticolo, aumenta la precisione della discretizzazione stessa.
In termini matriciali si tratta di risolvere il sistema lineare del tipo:

$AU = b$

in cui, tenendo conto delle condizioni al contorno, A è espressa da:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} D & d_1 & 0 & 0 & d_1 & 0 & \dots \\ d_1 & D & d_1 & 0 & 0 & d_1 & \dots \\ 0 & d_1 & D & d_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & d_1 & D & d_1 & 0 & \dots \\ d_1 & 0 & 0 & d_1 & D & d_1 & \dots \\ 0 & d_1 & 0 & 0 & d_1 & D & \dots \\ 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 & d_1 & \dots \end{pmatrix}$$

Dove $D = 4$ è il valore sulla diagonale principale, mentre $d_1 = -1$ è il valore sulle diagonali secondarie.

Il vettore U è incognito mentre b è il vettore dei termini noti, valutato in base ai valori delle condizioni al contorno.

Esplicitando per esempio una suddivisione del dominio in un reticolo, per esempio 5×5, con lati di medesima ampiezza:

$$u_{1,1} = \frac{u_{0,1} + u_{2,1} + u_{1,0} + u_{1,2}}{4} \qquad \text{dove} u_{0,1} \quad \text{e} \quad u_{1,0} \quad \text{sono noti.} \tag{1.5}$$

I termini della discretizzazione che cadono all'interno del dominio non hanno valori noti (poiché i punti vicini non cadono sulla frontiera).
Esplicitando tutti i termini, otteniamo una matrice di iterazione pentadiagonale, diagonalmente dominante di raggio spettrale pari a 0.8, per cui possiamo applicare i metodi iterativi di Jacobi o di Gauss-Siedel per risolvere numericamente il problema e successivamente valutare l'accuratezza dei risultati.
La rappresentazione grafica della soluzione analitica (1.1) può essere visualizzata in FIG.1.2.

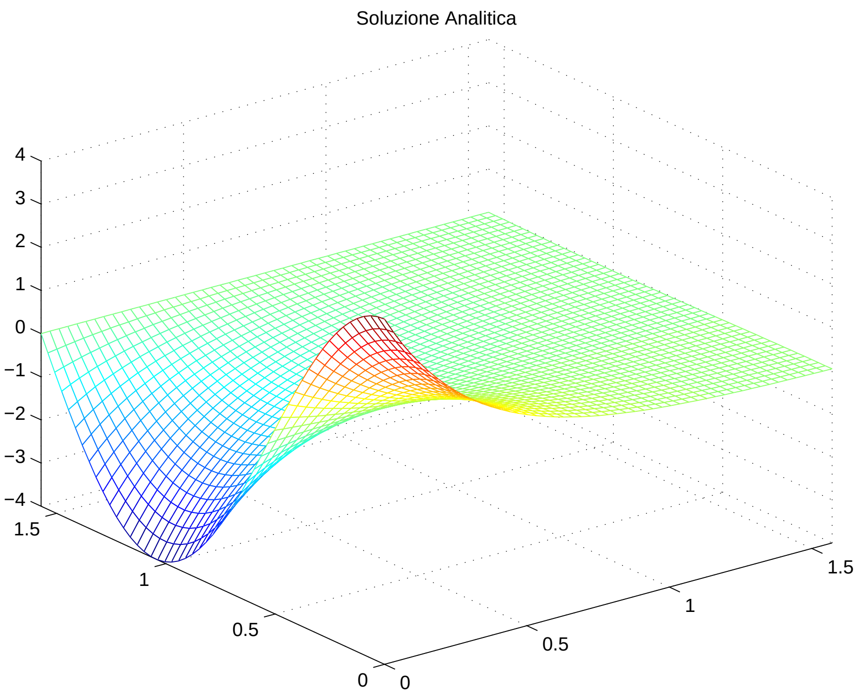

Figura 1.2: Rappresentazione della soluzione analitica.

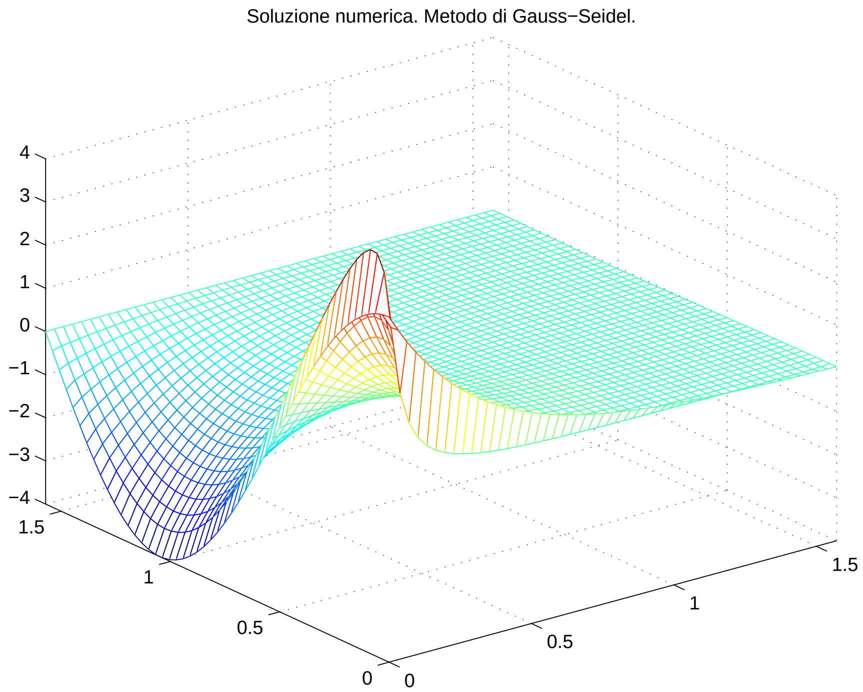

Figura 1.3: Soluzione numerica ottenuta col metodo di Gauss-Siedel con un valore di $\varepsilon = 10^{-4}$.

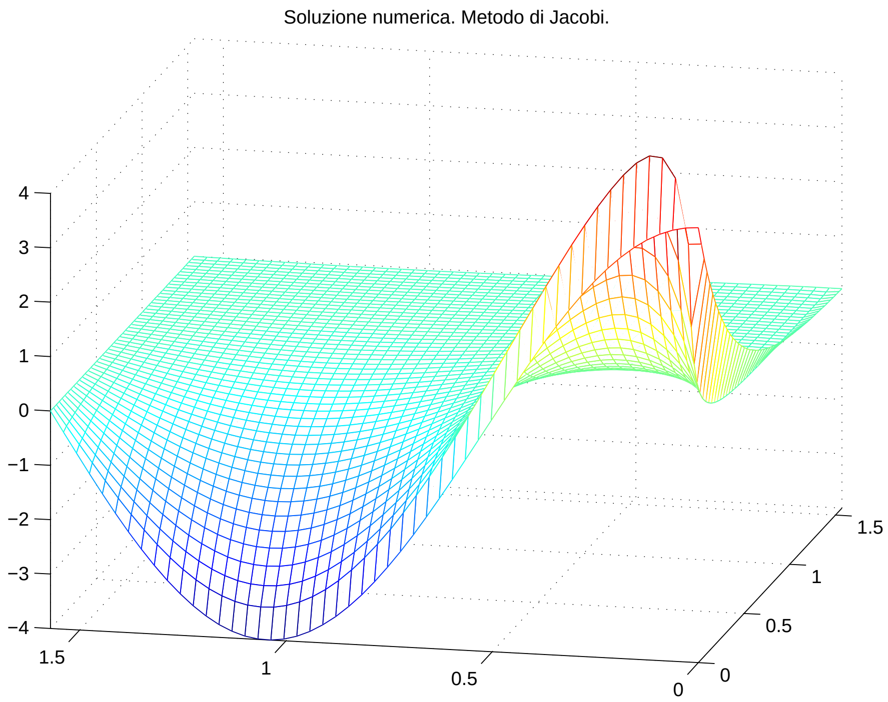

Figura 1.4: Soluzione numerica ottenuta col metodo di Jacobi con un valore di $\varepsilon = 10^{-4}$.

Capitolo 2

Esercizio 2

*In questo primo capitolo viene proposta la risoluzione di una equazione di tipo ellittico per via numerica, utilizzando il metodo di discretizzazione dell'*up-wind.

Indice

1 Definizione dell'equazione.

Si richiede di risolvere numericamente la seguente equazione differenziale di tipo ellittico:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + x^2 u_x + (xy)^\alpha u_y = 0 & -5 \leqslant x, y \leqslant 5 \\ u(-5,y) = 25 - y^2, & u(5,y) = \sin \pi y \\ u(x,-5) = 25 - x^2, & u(x,5) = \sin \pi x \\ \alpha = 2,5,8 \end{cases}$$

2 Ricerca della soluzione per via numerica.

Per la discretizzazione è stato utilizzato il metodo a 5 punti, usato anche per risolvere l'esercizio precedente.

In questo caso la matrice di iterazione non è definita positiva né diagonalmente dominante [2] e inoltre il suo raggio spettrale è molto maggiore dell'unità. Per tale ragione si preferisce fare un confronto tra la soluzione ottenuta col metodo diretto di Gauss e quella ottenuta col metodo GMRES. In FIG.**??** è rappresentata la soluzione numerica ottenuta con il metodo diretto di Gauss. Mentre in FIG.**??** è rappresentata la soluzione numerica ottenuta col metodo GMRES (*Generalized Minimum Residual Method*).

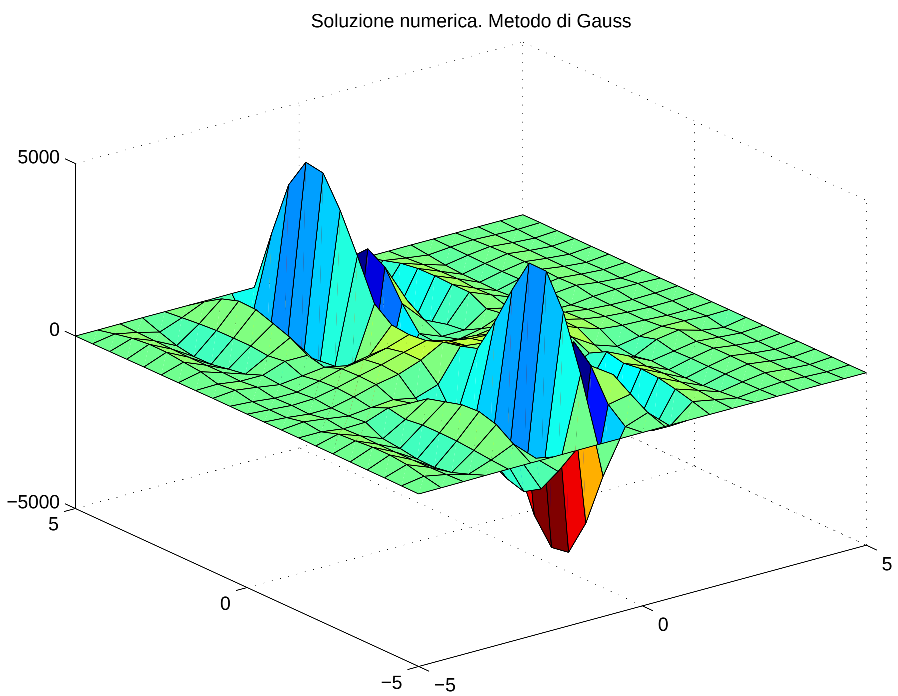

Figura 2.1: Soluzione numerica ottenuta con il metodo di Gauss.

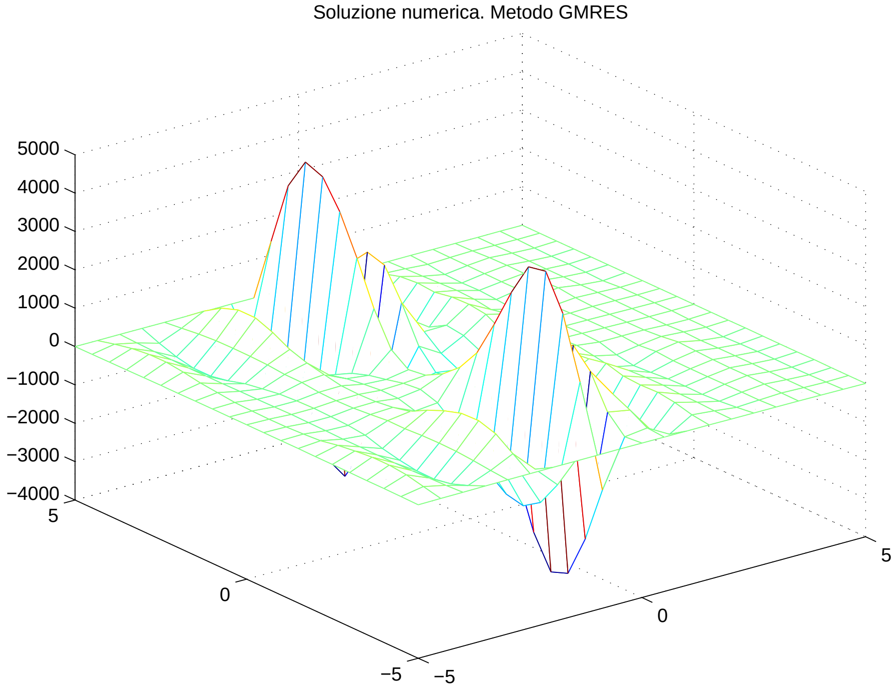

Figura 2.2: Soluzione numerica ottenuta con il metodo *GMRES*.

Bibliografia

[1] F. Maggio CVM. van der Mee, S. Seatzu. Introduzione ai metodi analitici e numerici per la risoluzione delle equazioni alle derivate parziali. *Dipartimento di Matematica ed Informatica*, 1:1–99, 2005.

[2] G. Rodriguez. Metodi iterativi per la risoluzione di modelli differenziali lineari e debolmente non lineari. *Dipartimento di Matematica ed Informatica*, 1:1–36, 2006.