



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

**REGOLARIZZAZIONE TRAMITE
FATTORIZZAZIONE AI
VALORI SINGOLARI:
TEORIA E APPLICAZIONI**

Seminario di Algebra Lineare Numerica

Relatore:
Prof. Giuseppe Rodriguez

Studente:
Antonio Altana

Anno Accademico 2014/2015

Indice

1	Introduzione sui sistemi Ground Penetrating Radar	2
2	Regolarizzazione	3
2.1	Problemi mal-posti	3
2.2	Decomposizione a valori singolari SVD	4
2.3	Metodo TSVD	6
2.4	Metodo Tikhonov	8
2.5	Scelta del parametro di regolarizzazione	8
2.5.1	Principio di discrepanza	9
2.5.2	Generalized cross-validation GCV	10
2.5.3	Curva-L	11
3	Applicazione con dati sperimentali	13
3.1	Regolarizzazione tramite TSVD	14
3.2	Regolarizzazione tramite Tikhonov	16

Capitolo 1

Introduzione sui sistemi Ground Penetrating Radar

Il Ground Penetrating Radar (GPR) è una tecnica di analisi non distruttiva, cioè una tecnica che non richiede l'alterazione o l'asporto di un campione dalla struttura da esaminare, usata nel campo della geofisica che permette di dedurre le caratteristiche del primo sottosuolo utilizzando i campi elettromagnetici.

Tale metodo si basa sullo studio dell'onda elettromagnetica riflessa dal terreno per dedurre la struttura e le proprietà dei materiali presenti nel suolo. I sistemi GPR sono fondamentalmente composti da due antenne, una adibita all'emissione di un segnale indirizzato verso il terreno e l'altra con il compito di ricevere il segnale riflesso dal terreno, il quale non è semplicemente l'onda riflessa da una discontinuità nel terreno ma è il risultato della convoluzione tra la risposta impulsiva del suolo e la risposta impulsiva dell'antenna. Per isolare le informazioni sul terreno che stiamo esaminando è necessario quindi eseguire una deconvoluzione; risolvere una deconvoluzione nel dominio del tempo significa risolvere una equazione integrale per cui si procede discretizzando l'integrale e risolvendo il sistema lineare ottenuto. La risoluzione del suddetto sistema è quello che si dice *un problema mal condizionato*, in seguito verranno esposti vari metodi per la risoluzione di tali problemi basando sempre sul problema della deconvoluzione di dati ricevuti da un sistema GPR.

Capitolo 2

Regolarizzazione

L'obiettivo dei metodi di regolarizzazione è permettere di trovare una soluzione approssimata a problemi mal-condizionati dove i metodi standard non riescono a trovare la soluzione.

2.1 Problemi mal-posti

Definizione 2.1 *Un problema è **ben posto** se esso possiede, in un prefissato campo di definizione, una e una sola soluzione e questa dipende con continuità dai dati. In caso contrario, viene detto **mal posto**.*

Nel caso in cui la soluzione non dipenda con continuità dai dati, è possibile che anche una piccola perturbazione su di essi porti ad una soluzione diversa da quella esatta. Questo aspetto è fondamentale nell'ambito di dati sperimentali in quanto i dati misurati sono sempre affetti da errore. Il condizionamento misura quanto un errore nei dati possa essere amplificato nei risultati.

Definizione 2.2 *Sia δ_d una perturbazione dei dati d di un problema e sia δ_x la corrispondente perturbazione sulla soluzione x . Sia inoltre $\|\cdot\|$ una qualsiasi norma vettoriale. Il **numero di condizionamento assoluto** $K=K(d)$ è definito dalla relazione*

$$\|\delta_x\| \leq K \|\delta_d\|$$

*mentre il **numero di condizionamento relativo** $k=k(d)$ verifica la disuguaglianza*

$$\frac{\|\delta_x\|}{\|x\|} \leq k \frac{\|\delta_d\|}{\|d\|}$$

2.2 Decomposizione a valori singolari SVD

Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matrice rettangolare con $m \geq n$. Allora la decomposizione a valori singolari della matrice A avrà la forma:

$$A = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \sigma_i \mathbf{v}_i^T \quad (2.1)$$

dove $U = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$ e $V = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ sono matrici con colonne ortonormali, $U^T U = V^T V = I_m$ e $\Sigma = \mathbf{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ è una matrice diagonale con elementi non-negativi in ordine non-crescente

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$$

Questi σ_i sono i *valori singolari* di A e i vettori \mathbf{u}_i e \mathbf{v}_i sono rispettivamente i *vettori singolari* sinistri e destri di A . Il condizionamento della matrice equivale al rapporto tra il più grande valore singolare e il più piccolo non nullo σ_1/σ_n .

Non è provato in generale ma è molto frequente nei problemi mal posti trovare queste due caratteristiche:

- i valori singolari σ_i decadono a zero gradualmente senza salti, al crescere delle dimensioni della matrice aumenta il numero di valori singolari piccoli, vedi Figura 2.1;
- i vettori singolari destri \mathbf{v}_i e sinistri \mathbf{u}_i tendono ad avere più cambi di segno all'incrementarsi dell'indice i , cioè al decrescere di σ_i , vedi Figura 2.2.

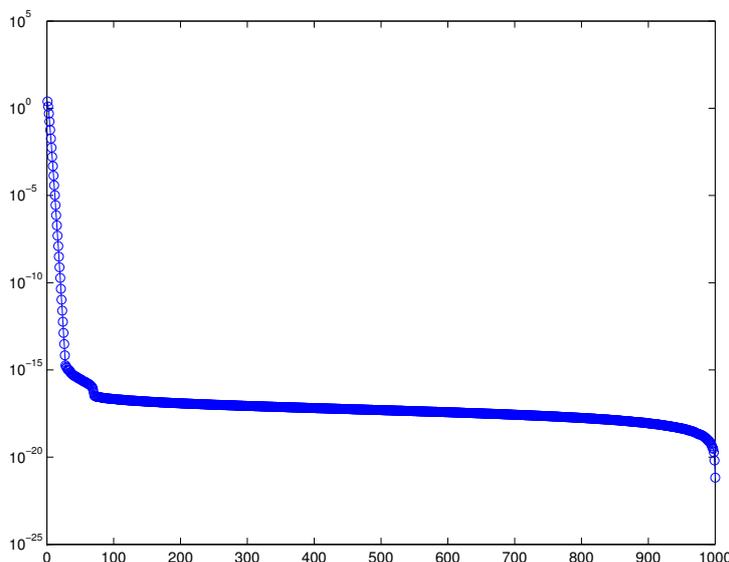


Figura 2.1: Decadimento valori singolari.

Uno o più valori singolari piccoli implicano che la matrice A è quasi *rank deficient* cioè non tutte le colonne di A sono esattamente linearmente indipendenti.

Consideriamo il sistema lineare mal condizionato

$$Ax = \mathbf{b} \quad (2.2)$$

e sostituiamo in esso la SVD di A :

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \sigma_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{x}_i = \mathbf{b}$$

dove $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{b}} + \mathbf{e}$, $\hat{\mathbf{b}}$ è il vettore dei termini noti esatto, \mathbf{e} è l'errore, possiamo risolvere il sistema tramite

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i$$

in presenza di uno o più valori singolari piccoli, dato che si trovano a denominatore, la norma $\|x\|_2$ cresce e aumenta l'amplificazione degli errori \mathbf{e} .

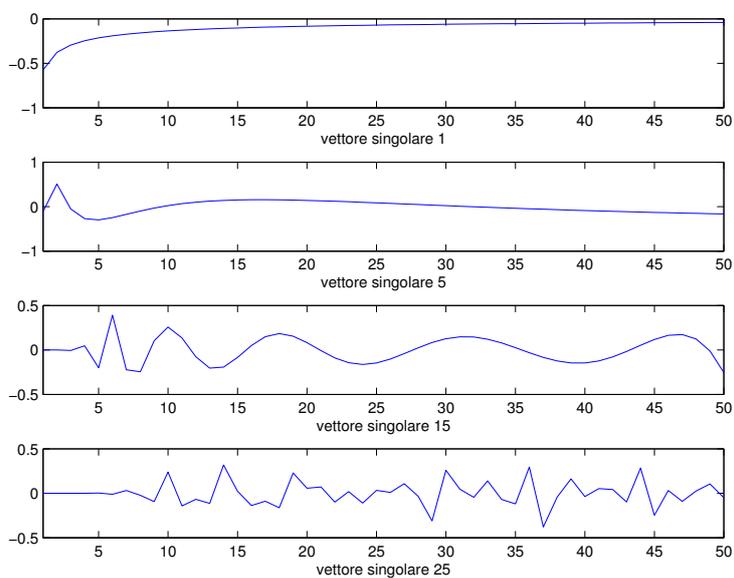


Figura 2.2: Aumento della frequenza nei vettori singolari.

2.3 Metodo TSVD

Consideriamo il sistema (2.2).

Il metodo **Truncated SVD** consiste nel sostituire la matrice mal condizionata con una matrice di rango minore k ben condizionata

$$A_k = \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i \sigma_i \mathbf{v}_i^T \quad k \leq n$$

e risolvere il sistema

$$A_k \mathbf{x}_k = \mathbf{b}$$

in modo da soddisfare due vincoli:

1. $\min \|\mathbf{x}\|_2$
2. $\min \|A_k \mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$

le soluzioni calcolate come

$$\mathbf{x}_k = \sum_{i=1}^k \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i$$

In questo modo il metodo TSVD non considera in valori singolari piccoli che creano problemi nella soluzione.

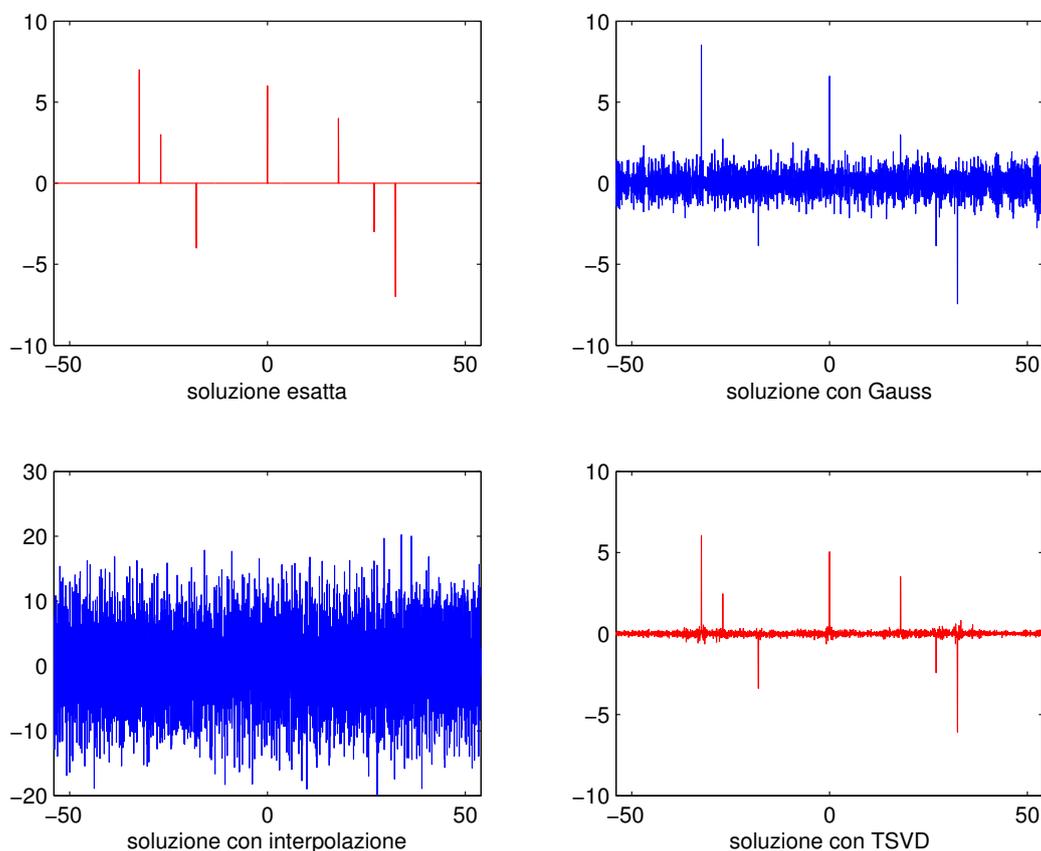


Figura 2.3: Soluzione esatta e calcolata con metodi diversi

La figura si riferisce alla simulazione di una misurazione su un terreno argilloso con costante dielettrica ($K = 36$) con una profondità massima raggiungibile 2m; la velocità di propagazione nel terreno è $V_p = 0.048m/ns$ e la frequenza del segnale inviato 600 MHz. In figura sono riportate la soluzione impostata, la soluzione ottenuta risolvendo la deconvoluzione senza regolarizzare usando solo il metodo di Gauss, la soluzione ottenuta risolvendo la deconvoluzione nel dominio della frequenza e infine la soluzione della deconvoluzione regolarizzata tramite il metodo TSVD.

2.4 Metodo Tikhonov

Il metodo di Tikhonov consiste nel soddisfare gli stessi vincoli già presentati nel metodo TSVD:

1. $\min \|\mathbf{x}\|_2$
2. $\min \|A_\lambda \mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$

tramite la scelta della soluzione \mathbf{x}_λ per cui

$$\mathbf{x}_\lambda = \min \{ \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda^2 \|\mathbf{x}\|_2^2 \}$$

Il parametro di regolarizzazione λ influisce sul peso dato alla regolarizzazione rispetto alla minimizzazione del residuo. La scelta del parametro di regolarizzazione è di fondamentale importanza in quanto un valore λ elevato, equivalente a una massiccia regolarizzazione, impone la scelta di una soluzione con una norma piccola a discapito però dell'aumento del residuo; tuttavia scegliendo un valore di λ basso, riducendo così la regolarizzazione, si favorisce la diminuzione del residuo incrementando però la norma della soluzione.

2.5 Scelta del parametro di regolarizzazione

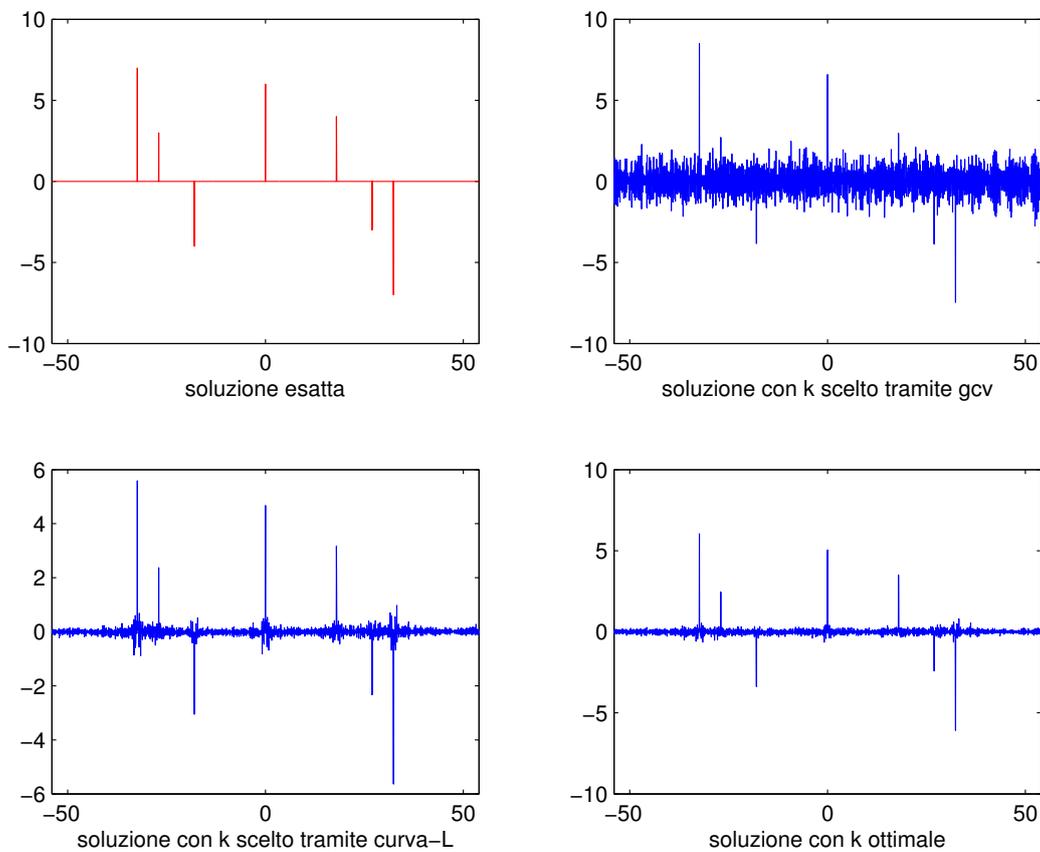


Figura 2.4: Soluzione esatta e calcolata tramite TSVD, con diversi parametri di regolarizzazione

Il problema principale nell'utilizzo dei metodi precedentemente descritti sta nella scelta del parametro di regolarizzazione, i metodi per stimarlo sono divisi in due classi:

1. basati sulla conoscenza dell'errore $\|\mathbf{e}\|_2$;
2. euristici, cioè non si basano sulla conoscenza a priori dell'errore.

2.5.1 Principio di discrepanza

Il principio di discrepanza è un metodo che appartiene alla prima classe e per la scelta del parametro di regolarizzazione sceglie il valore di k per cui è rispettata la condizione

$$\|A\mathbf{x}_{\text{reg}} - \mathbf{b}\|_2 \simeq \|\mathbf{e}\|_2$$

che se si ha una buona stima dell'errore fornisce una buona regolarizzazione.

2.5.2 Generalized cross-validation GCV

Il metodo GCV per trovare il valore del parametro di regolarizzazione k sceglie il valore per cui è minima la funzione

$$G_{reg} \equiv \frac{\|A\mathbf{x}_{reg} - \underline{b}\|_2^2}{(\text{traccia}(I_m - AA_{reg}))^2}$$

dove A_{reg} è la matrice che produce la soluzione regolarizzata ($\mathbf{x}_{reg} = A_{reg}\underline{b}$).

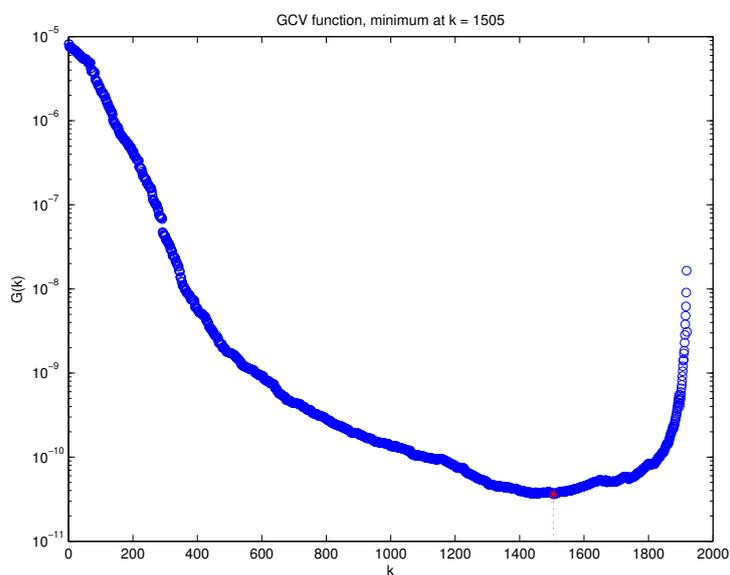


Figura 2.5: Minimo nella funzione G_{reg}

2.5.3 Curva-L

Come detto precedentemente in presenza di valori singolari piccoli la norma della soluzione $\|\mathbf{x}\|$ aumenta e si allontana da quella esatta pur diminuendo $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ detto *residuo*.

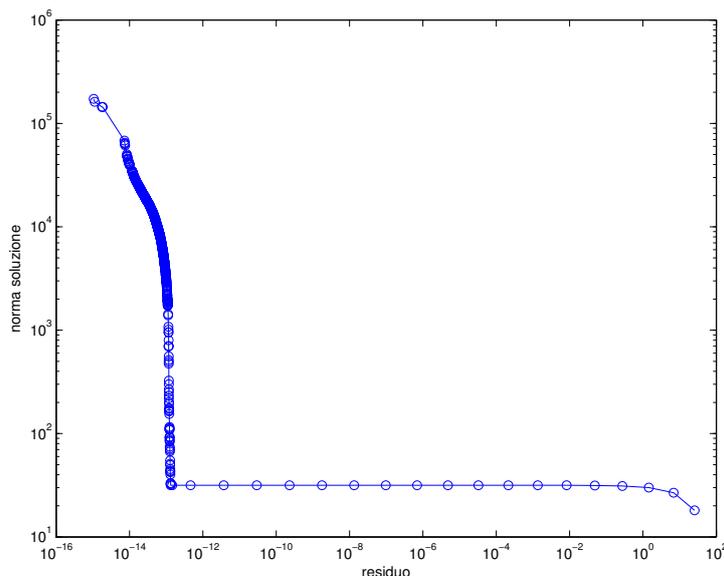


Figura 2.6: Curva-L.

Mettendo in relazione la norma della soluzione e il residuo al variare del parametro di regolarizzazione con un grafico in scala logaritmica otteniamo la cosiddetta *curva-L* tramite la quale possiamo trovare il parametro di regolarizzazione scegliendo il valore per cui ci troviamo in prossimità dell'angolo; per questo valore la soluzione regolarizzata è un compromesso tra una soluzione con norma piccola e residuo basso.

La Figura 2.7 si riferisce alla stessa simulazione della Figura 2.3. A seconda del parametro scelto la soluzione è più o meno precisa; in Matlab è possibile scegliere il parametro di regolarizzazione tramite la curva-L con due metodi che lavorano in modo diverso e potrebbero quindi restituire valori di k diversi.

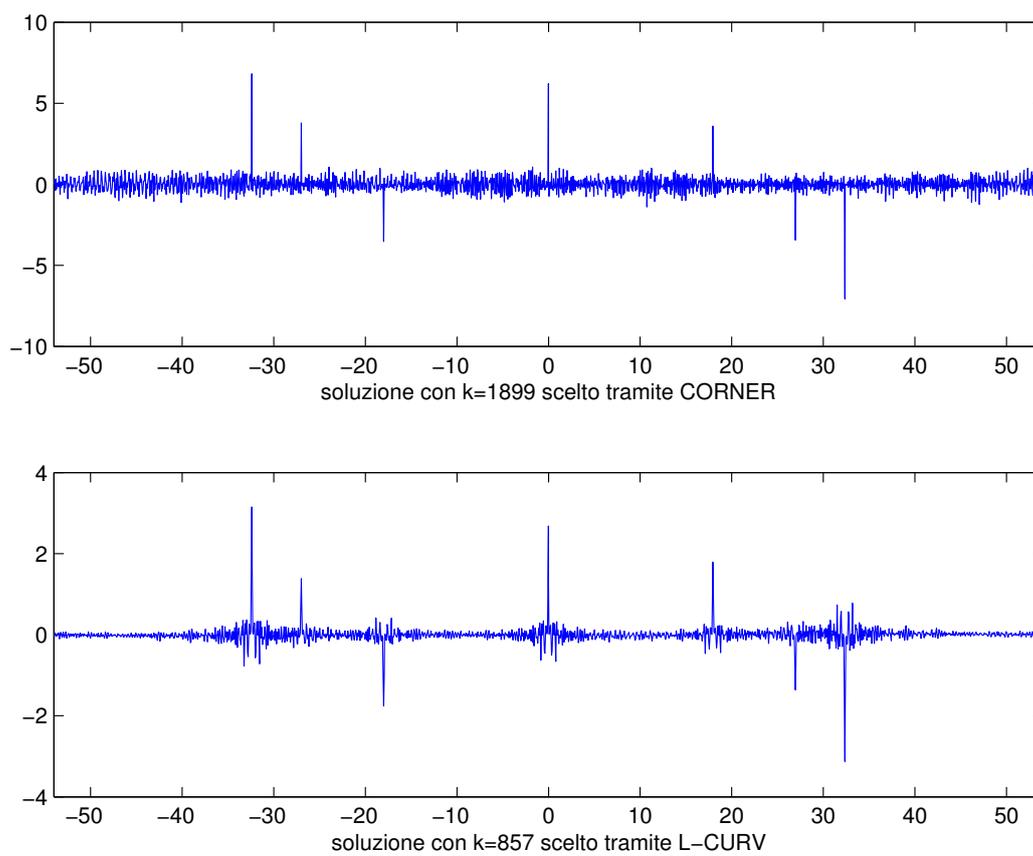


Figura 2.7: Soluzione esatta e calcolata tramite TSVD, con due diversi parametri di regolarizzazione

Capitolo 3

Applicazione con dati sperimentali

Consideriamo ora il caso pratico dell'elaborazione di dati sperimentali relativi ad una misurazione effettuata con un sistema GPR.

I dati misurati si presentano come una matrice di 2564 colonne e 326 righe; per cui le considerazioni fatte nel capitolo precedente su una colonna di termini noti devono essere estese a una matrice in cui ogni colonna rappresenta un termine noto, equivalente a risolvere 2564 sistemi lineari

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{R} \quad \mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{G}, \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (3.1)$$

dove $n = 326$ e $m = 2564$.

Se dovessimo risolvere singolarmente ogni sistema lineare

$$\mathbf{W}\mathbf{g}_i = \mathbf{r}_i \quad i = 1, \dots, m$$

la complessità sarebbe $O(m \cdot \frac{n^3}{3})$ dove m è il numero di colonne, cioè quante volte risolviamo il sistema, ed n è il numero di righe; per cui è più conveniente fattorizzare una sola volta la matrice \mathbf{W} tramite la fattorizzazione $PA=LU$ e risolvere singolarmente le coppie di sistemi triangolari

$$\begin{cases} L\mathbf{y}_i = \mathbf{r}_i \\ U\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i \end{cases}$$

riducendo la complessità a $O(\frac{n^3}{3} + m \cdot n^2)$ che è prossima a $O(n^3)$ quando $m \simeq n$.

In Figura 3.3 vediamo i dati grezzi e i dati dopo la deconvoluzione ipotizzando un rapporto tra finestra e wavelet di 150, per cui $A=5 \cdot 150=750$ [ns].

In questo caso il condizionamento della matrice è $3.92 \cdot 10^2$ che di per sé non

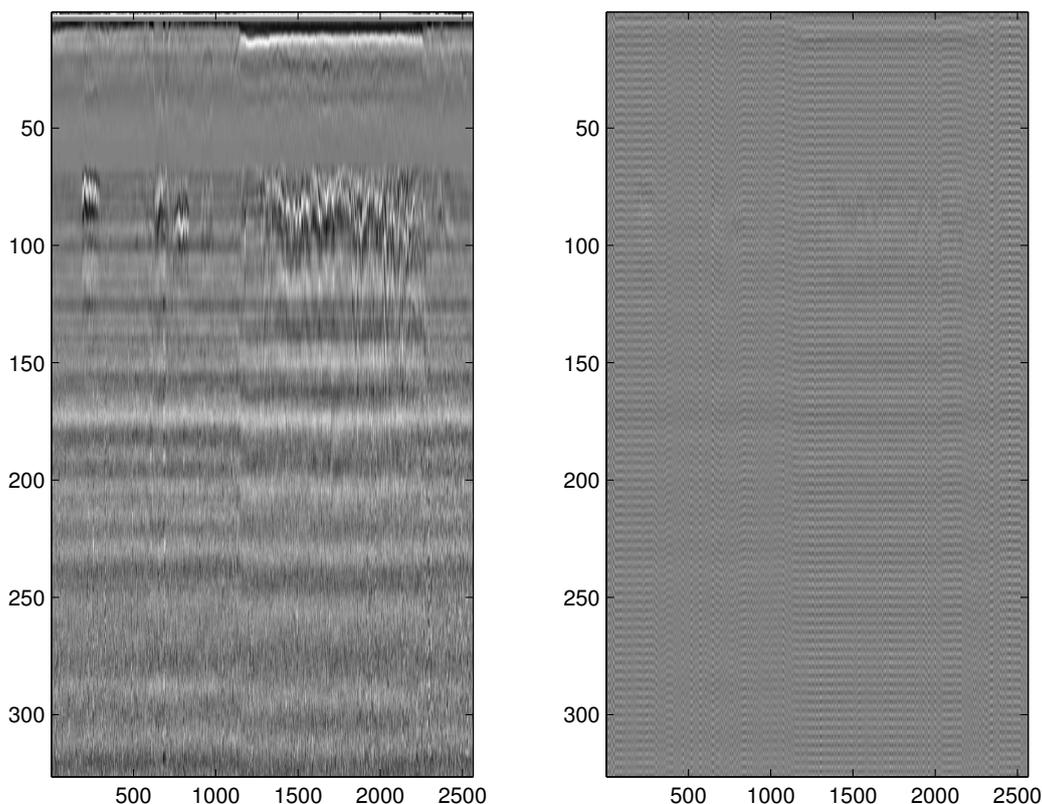


Figura 3.1: Dati grezzi e dati dopo la deconvoluzione quando il rapporto tra finestra e wavelet è 150.

è un valore alto ma nel caso di dati sperimentali dove l'errore sulla misura può essere dell'ordine di 10^{-1} , come visto nella Definizione 2.2 è sufficiente per amplificare l'errore sulla soluzione; infatti non è possibile vedere tra la tracce 1250 e 2250 quello che dovrebbe essere un tombino di metallo e prima della traccia 1000 due tubature. Per questo motivo è necessario applicare una regolarizzazione per poter ottenere una soluzione corretta.

Di seguito verrà risolta la deconvoluzione regolarizzata tramite il metodo TSVD con un coefficiente di regolarizzazione unico per tutte le colonne e tramite il metodo di Tikhonov con un coefficiente di regolarizzazione diverso per ogni colonna di termini noti.

3.1 Regolarizzazione tramite TSVD

Dopo aver proceduto a tentativi per diversi valori di k il parametro di regolarizzazione è scelto uguale per tutte le colonne pari a $k=322$, ma è possibile

che esista un valore ottimale del parametro k diverso per ogni colonna di termini noti. La soluzione è ottenuta eseguendo il prodotto tra matrici:

$$\mathbf{G} = \mathbf{V}_k \mathbf{\Sigma}_k^\dagger \mathbf{U}_k^T \mathbf{R} \quad (3.2)$$

dove $\mathbf{V}_k, \mathbf{U}_k^T$ sono le matrici contenenti i vettori singolari e $\mathbf{\Sigma}_k^\dagger$ è la pseudo-inversa della matrice diagonale contenente i valori singolari troncate secondo il parametro k . Dopo la deconvoluzione regolarizzata in Figura 3.2 è possi-

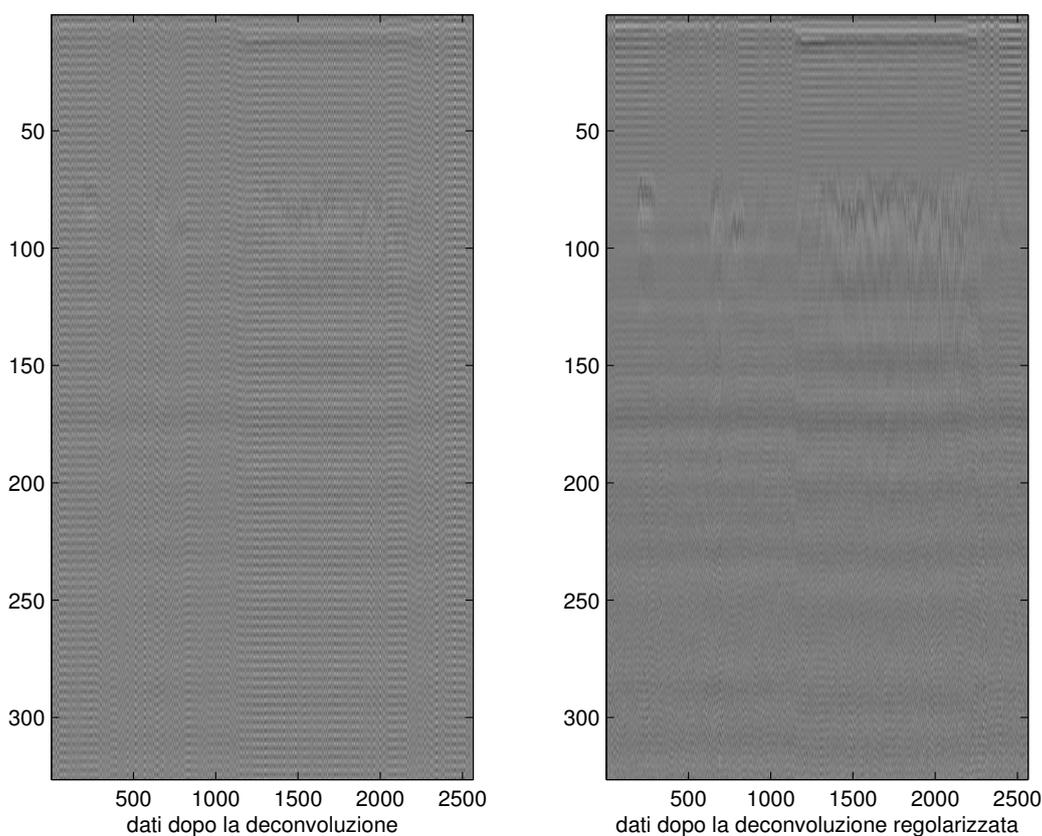


Figura 3.2: A sinistra i dati dopo la deconvoluzione, a destra i dati dopo la deconvoluzione regolarizzata tramite metodo TSVD con parametro di regolarizzazione $k=322$.

bile vedere l'oggetto quadrato che dovrebbe essere un tombino e prima della traccia 1000 si possono vedere due oggetti coerenti con le due tubature.

3.2 Regolarizzazione tramite Tikhonov

A differenza della risoluzione esposta precedentemente per regolarizzare la deconvoluzione con il metodo di Tikhonov si è scelto di utilizzare un parametro di regolarizzazione diverso per ogni colonna di termini noti. Calcoliamo il parametro di regolarizzazione λ relativo ad ogni colonna della matrice \mathbf{R} utilizzando il metodo GCV fino a ottenere 2564 valori specifici di λ ognuno dei quali ottimale per la corrispondente colonna di termini noti. Utilizzando ogni valore di λ per la regolarizzazione otteniamo 2564 colonne di valori ognuna delle quali rappresenta la soluzione regolarizzata al sistema corrispondente a una colonna di termini noti.

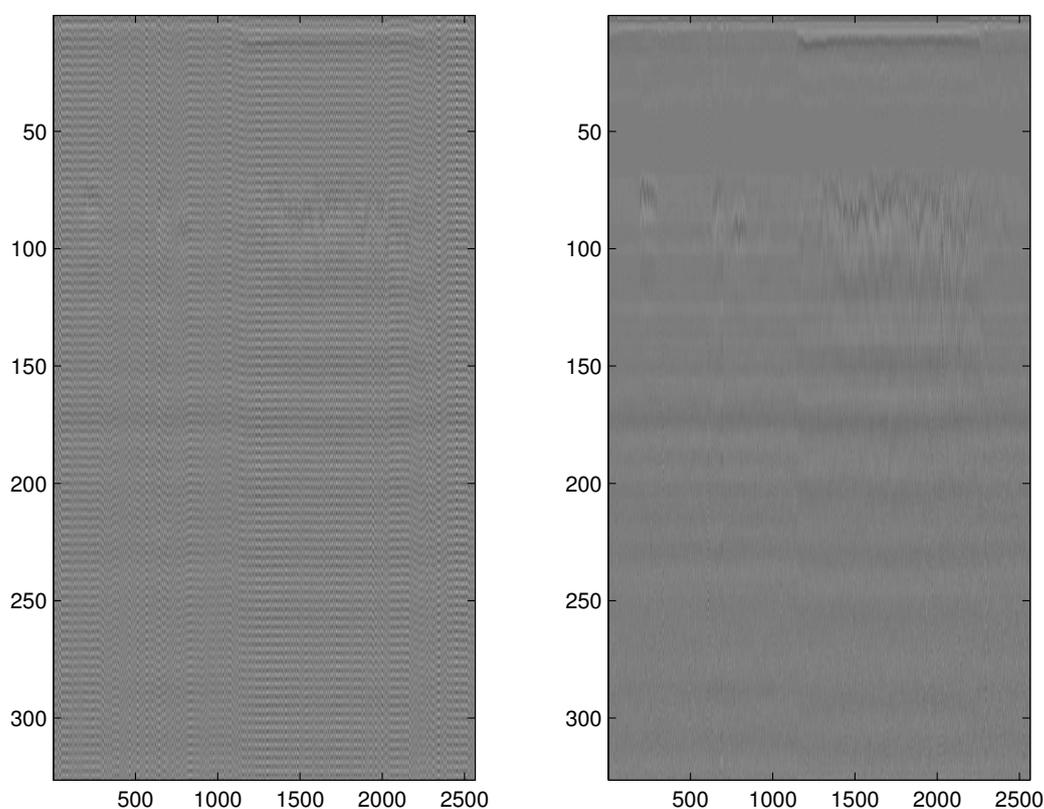


Figura 3.3: A sinistra i dati dopo la deconvoluzione, a destra i dati dopo la deconvoluzione regolarizzata tramite il metodo di Tikhonov con parametro di regolarizzazione specifico per ogni colonna.