



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
Facoltà di Ingegneria e Architettura

Corso di laurea triennale in
Ingegneria Elettrica ed Elettronica

**Problema ai minimi quadrati
nella risoluzione di sistemi lineari
indeterminati**

Relazione per il Seminario Avanzato di Matematica Applicata

Studente

Antonio Marongiu
matr. n° 70/87/46164

Docente

Prof. G. Rodriguez

Sistemi lineari $m \times n$, con $m \neq n$.

Un sistema lineare è un insieme finito di simultanee equazioni lineari aventi le stesse incognite x_1, \dots, x_n

$$Ax = b$$

Una soluzione del sistema lineare è una n -upla $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ che sia soluzione di tutte le equazioni contemporaneamente. Un sistema lineare si dice risolubile (o compatibile) se ha almeno una soluzione.

Il sistema è costituito da m equazioni in n incognite (m, n qualsiasi). Il rango della matrice rettangolare A non può superare il più piccolo tra i numeri m ed n .

➤ $m > n$

Si può estrarre dalla matrice rettangolare A una sottomatrice quadrata di ordine n ; sia k il rango della matrice A .

$$\begin{cases} k(A) \neq k(A, \mathbf{b}) & \text{ sistema incompatibile } k(A, \mathbf{b}) > n \\ k(A) = k(A, \mathbf{b}) & \text{ sistema compatibile } \begin{cases} k(A) = n & \text{ soluzione unica} \\ k(A) < n & \infty^{n-k(A)} \text{ soluzioni} \end{cases} \end{cases}$$

Il problema potrebbe non avere soluzioni. Il sistema è detto sovradeterminato.

➤ $m < n$

Si può estrarre dalla matrice rettangolare A una sottomatrice quadrata di ordine m ; sia k il rango della matrice A . Poiché $k \leq m < n$, il sistema non potrà mai avere una ed una sola soluzione.

$$\begin{cases} k(A) \neq k(A, \mathbf{b}) & \text{ sistema incompatibile} \\ k(A) = k(A, \mathbf{b}) & \text{ sistema compatibile } \Rightarrow k(A) < n \quad \infty^{n-k(A)} \text{ soluzioni} \end{cases}$$

Il problema potrebbe avere infinite soluzioni. Il sistema è detto sottodeterminato.

Questi casi son esempi di problemi mal posti (soluzione inesistente o non unica). In particolare sia fatta attenzione sul primo caso, frequente nelle applicazioni: il numero di equazioni è ridondante e superiore al numero delle incognite.

Idealmente il numero di equazioni linearmente indipendenti è $m - n$, ma potrebbe non essere noto quali. Nel caso di dati affetti da errore è conveniente risolvere un numero sovrabbondante di equazioni per effettuare un processo di *noise reduction*.

Nel caso specifico di problema mal posto in un sistema sovradeterminato è ragionevole richiedere che sia minima la lunghezza euclidea del vettore residuo (detta anche varianza). Il *least squares problem*, o problema della regressione polinomiale, si esplica nella condizione di varianza minima

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$$

Se la varianza minima è nulla, il sistema originale ammette una soluzione in senso classico (unica e dipendente con continuità dai dati). In caso contrario si ottiene la soluzione nel senso dei minimi quadrati.

Metodo delle equazioni normali.

Data $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m \geq n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, si dice che $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, è soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se

$$\Phi(\tilde{\mathbf{x}}) = \|A\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2^2 \leq \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x})$$

Si tratta dunque di minimizzare la norma euclidea del residuo. La soluzione può essere ottenuta imponendo che il gradiente¹ della funzione Φ si annulli in $\tilde{\mathbf{x}}$. Essendo

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= (A\mathbf{x} - \mathbf{b})^T (A\mathbf{x} - \mathbf{b}) = \mathbf{x}^T A^T A \mathbf{x} - \mathbf{x}^T A^T \mathbf{b} - \mathbf{b}^T A \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{b} \\ &= \mathbf{x}^T A^T A \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T A^T \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{b} \end{aligned}$$

Si trova dunque

$$\nabla \Phi(\tilde{\mathbf{x}}) = 2A^T A \tilde{\mathbf{x}} - 2A^T \mathbf{b} = 0$$

Da cui si deduce che $\tilde{\mathbf{x}}$ è la soluzione del sistema $n \times n$

$$A^T A \tilde{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$$

Nota come *sistema normale* di equazioni. Se A è a rango pieno, tale sistema è non singolare. In tal caso, la soluzione nel senso dei minimi quadrati esiste ed è unica

$$\tilde{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$$

Se A ha rango inferiore a n , la matrice $A^T A$ risulta singolare, ma il sistema resta consistente in quanto il vettore $A^T \mathbf{b}$ appartiene all'immagine di A^T , che coincide con l'immagine di $A^T A$. In questo caso, tra gli infiniti vettori soluzione, usualmente si assume come soluzione $\tilde{\mathbf{x}}$ quella dotata di minima norma euclidea (soluzione normale). Per risolvere il sistema, nel caso a rango pieno, essendo $A^T A$ simmetrica e definita positiva, si potrebbe usare la sua fattorizzazione di *Cholesky*: $A^T A = R^T R$, con R matrice $n \times n$ triangolare superiore, il vettore $\tilde{\mathbf{x}}$ può essere calcolato risolvendo in successione i due sistemi triangolari

$$\begin{cases} R^T \mathbf{y} = A^T \mathbf{b} \\ R \mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$

Tuttavia, il sistema è solitamente mal condizionato; inoltre, a causa degli errori di arrotondamento, nel calcolo di $A^T A$ possono andare perdute cifre significative con conseguente perdita della definita positività o della non singolarità della matrice. È quindi in generale più conveniente impiegare la fattorizzazione QR .

¹ Si riporta in breve la definizione di gradiente di una funzione. Si definisce **gradiente** un operatore del primo ordine che associa ad ogni campo scalare definito e differenziabile in Ω il campo vettoriale le cui componenti sono le derivate parziali prime:

$$\nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)_{1 \leq j \leq n}$$

La decomposizione ai valori singolari (SVD) e la matrice pseudo-inversa.

Una qualunque matrice può essere ridotta in forma diagonale tramite pre e post-moltiplicazione per matrici unitarie.

Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Esistono due matrici unitarie $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tali che

$$U^T A V = \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Con $p = \min(m, n)$ e $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$. Tale espressione è detta decomposizione in valori singolari (SVD) di A e i $\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^*A)}$, $i = 1, \dots, n$ sono detti valori singolari di A .

Supponiamo che il rango di $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sia pari a r e che A ammetta una SVD del tipo $U^* A V = \Sigma$.

La matrice $A^\dagger = V \Sigma^\dagger U^*$ è detta pseudo-inversa di Moore-Penrose o inversa generalizzata, solo se $m \geq n$ e A è a rango pieno; essendo

$$\Sigma^\dagger = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots, 0\right)$$

Risoluzione QR.

Si dice che una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, con $m \geq n$, ammette una fattorizzazione QR se esistono una matrice $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ortogonale ed una matrice triangolare superiore $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tali che $A = QR$.

La fattorizzazione QR esiste ed è unica, avendo A rango pieno.

$$\|Ax - b\|^2 = \|QRx - b\|^2 = \|Q(Rx - Q^T b)\|^2 = \|Rx - c\|^2$$

Avendo posto $c = Q^T b$ e ricordando che una matrice ortogonale ha norma-2 unitaria. La matrice R ha la forma

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con R_1 triangolare superiore, quadrata e, se A è a rango pieno, non singolare. Partizionando in maniera coerente anche c

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, c_1 \in \mathbb{R}^n, c_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$$

Si ha

$$\|Ax - b\|^2 = \|Rx - c\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} R_1 x \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \right\|^2 = \|R_1 x - c_1\|^2 + \|c_2\|^2$$

Se $\det(R_1) \neq 0$, il sistema

$$R_1 x = c_1$$

Ammette una e una sola soluzione, per la quale si ha $\|R_1 x - c_1\|^2 = 0$. In corrispondenza a tale soluzione

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2 = \|c_2\|$$

Perciò l'eventuale annullarsi del vettore \mathbf{c}_2 significa che \mathbf{x} è la soluzione classica del sistema iniziale $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. In caso contrario, essa è la soluzione nel senso dei minimi quadrati, e la norma di \mathbf{c}_2 fornisce la misura della varianza minima. Rispetto all'approccio basato sulle equazioni normali questo metodo ha il vantaggio di operare direttamente sulla matrice A , il cui condizionamento è pari alla radice quadrata di quello di $A^T A$.

Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, con $m \geq n$ una matrice di rango pieno. Allora l'unica soluzione nel senso dei minimi quadrati è data da

$$\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{R}^{-1} \tilde{Q}^T \mathbf{b}$$

Essendo $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\tilde{Q} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ le matrici definite dalla fattorizzazione QR . Inoltre il minimo di Φ vale

$$\Phi(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{i=n+1}^m [(Q^T \mathbf{b})_i]^2$$

Infatti

$$\|R\mathbf{x} - Q^T \mathbf{b}\|_2^2 = \|\tilde{R}\mathbf{x} - \tilde{Q}^T \mathbf{b}\|_2^2 + \sum_{i=n+1}^m [(Q^T \mathbf{b})_i]^2$$

Ed il minimo è quindi raggiunto per

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{R}^{-1} \tilde{Q}^T \mathbf{b}$$

Se A non ha rango pieno tali tecniche di risoluzione si dimostrano inappropriate: se $\tilde{\mathbf{x}}$ è una soluzione nel senso dei minimi quadrati, anche $\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{z}$ con $\mathbf{z} \in \ker(A)$ è soluzione. Si deve perciò introdurre un ulteriore vincolo per fissare un'unica soluzione. Ciò viene ottenuto richiedendo che $\tilde{\mathbf{x}}$ abbia norma euclidea minima, di modo che il problema precedente diventa

Trovare $\tilde{\mathbf{x}}$ tale che $\|\tilde{\mathbf{x}}\|_2$ sia minima e

$$\|A\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2^2 \leq \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$$

Questo problema è consistente con il caso precedente qualora A abbia rango pieno, in quanto in tal caso $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x})$ ammette un'unica soluzione che avrà necessariamente norma euclidea minima.

Lo strumento che consente di calcolare la soluzione di

$$\|A\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2^2 \leq \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$$

è la decomposizione in valori singolari (SVD). Vale infatti il seguente risultato

Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Allora l'unica soluzione di $\|A\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2^2 \leq \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$ è

$$\tilde{\mathbf{x}} = A^\dagger \mathbf{b}$$

Essendo A^\dagger la pseudo-inversa di A .

Utilizzando la SVD di A , $A = U\Sigma V^T$, il problema ai minimi quadrati è equivalente a cercare $\mathbf{w} = V^T \mathbf{x}$ tale che \mathbf{w} abbia norma euclidea minima e

$$\|\Sigma \mathbf{w} - U^T \mathbf{b}\|_2^2 \leq \|\Sigma \mathbf{y} - U^T \mathbf{b}\|_2^2, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

Se r è il numero di valori singolari σ_i non nulli di A , allora

$$\|\Sigma \mathbf{w} - U^T \mathbf{b}\|_2^2 = \sum_{i=1}^r (\sigma_i \omega_i - (U^T \mathbf{b})_i)^2 + \sum_{i=r+1}^m ((U^T \mathbf{b})_i)^2$$

Che è minimo se $\omega_i = \frac{(U^T \mathbf{b})_i}{\sigma_i}$ per $i = 1, \dots, r$. Inoltre è evidente che fra tutti i vettori \mathbf{w} di \mathbb{R}^n che hanno le prime r componenti fissate, quello che rende minima la norma euclidea ha le restanti $n - r$ componenti nulle. Dunque, il vettore soluzione da cercare è $\tilde{\mathbf{w}} = \Sigma^\dagger U^T \mathbf{b}$ ossia $\tilde{\mathbf{x}} = V \Sigma^\dagger U^T \mathbf{b} = A^\dagger \mathbf{b}$.

Per quanto riguarda la stabilità del problema, ci limitiamo a fare notare che se il rango di A non è pieno, la soluzione $\tilde{\mathbf{x}}$ non è necessariamente una funzione continua dei dati e piccoli cambiamenti su di essi possono produrne di grandi su $\tilde{\mathbf{x}}$.

Nel caso di sistemi sotto determinati, in cui $m < n$, se A ha rango massimo si può ancora utilizzare la fattorizzazione QR . In particolare, se si opera sulla matrice traspota si ottiene la soluzione del sistema con norma euclidea minima. Se invece la matrice non ha rango massimo, si ricorre nuovamente alla SVD . Nel caso in cui $m = n$, si possono evidentemente ancora usare la SVD o la fattorizzazione QR in alternativa al metodo di Gauss per la risoluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Anche se questi algoritmi hanno un costo di gran lunga superiore a quello richiesto dal metodo di Gauss, essi risultano preferibili ad esso quanto il sistema sia mal condizionato e prossimo ad essere singolare.

Condizionamento di un problema dei minimi quadrati.

Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, con rango $n < m$. Si può assumere come numero di condizionamento di A il numero

$$k_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$

Sia \mathbf{x} la soluzione del problema

$$\min_y \|A\mathbf{y} - \mathbf{b}\|_2$$

E sia $\mathbf{r} = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$ il residuo. Poniamo $\sin \vartheta = \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}$. Sia $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ la soluzione di

$$\min_y \|(A + \delta A)\mathbf{y} - \mathbf{b}\|_2$$

e supponiamo che $\varepsilon = \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$ sia piccolo. Allora

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \varepsilon [\tan \vartheta k_2^2(A) + k_2(A)] + O(\varepsilon^2)$$

$$\frac{\|\Delta\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq 2\varepsilon k_2(A) + O(\varepsilon^2)$$

Matrici di Householder.

Le matrici di *Householder* sono matrici elementari del tipo

$$H(2, \mathbf{w}, \mathbf{w}) = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T$$

ove $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ è un vettore di lunghezza unitaria: $\|\mathbf{w}\|_2 = 1$. Si tratta di matrici ortogonali, simmetriche e involutorie. Vengono anche indicate come matrici di riflessione o riflettori elementari, in quanto rappresentano la simmetria rispetto all'iperpiano passante per l'origine e ortogonale al vettore \mathbf{w} .

Se si pre-moltiplica una matrice $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ per H , si ottiene una matrice A' le cui colonne sono trasformate nel seguente modo

$$\mathbf{a}'_k = (I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T)\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_k - 2(\mathbf{w}^T \mathbf{a}_k)\mathbf{w}$$

Allo stesso modo nella post-moltiplicazione sono le righe ad essere trasformate indipendentemente.

Dal punto di vista numerico le matrici di *Householder* sono importanti per la seguente proprietà.

Siano \mathbf{x} e \mathbf{y} due vettori qualunque di \mathbb{R}^n , linearmente indipendenti con $\|\mathbf{y}\|_2 = 1$. Si può allora determinare un vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, con $\|\mathbf{w}\|_2 = 1$, e uno scalare α tali che se $H = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T$, allora $H\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$.

Dimostrazione.

Poiché H è ortogonale, si ha

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \|H\mathbf{x}\|_2 = \|\alpha\mathbf{y}\|_2 = |\alpha|$$

Da cui si hanno due possibili scelte per α : $\|\mathbf{x}\|$ o $-\|\mathbf{x}\|$. L'uguaglianza $H\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$ si scrive

$$\mathbf{x} - 2(\mathbf{w}^T \mathbf{x})\mathbf{w} = \alpha\mathbf{y}$$

Oppure

$$\mathbf{x} - \alpha\mathbf{y} = 2\lambda\mathbf{w}$$

con $\lambda = \mathbf{w}^T \mathbf{x}$.

Per calcolare λ si fa il prodotto scalare dell'uguaglianza precedente per \mathbf{x} :

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} - \alpha \mathbf{x}^T \mathbf{y} = 2\lambda \mathbf{x}^T \mathbf{w} = 2\lambda^2$$

Poiché i vettori \mathbf{x}, \mathbf{y} non sono linearmente dipendenti si ha:

$$|\mathbf{x}^T \mathbf{y}| < \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| = |\alpha|$$

E l'uguaglianza precedente permette di determinare $\lambda \neq 0$, poiché $\mathbf{x}^T \mathbf{x} - \alpha \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \alpha^2 - \alpha \mathbf{x}^T \mathbf{y} > 0$. Il vettore \mathbf{w} è allora definito da $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{x} - \alpha\mathbf{y}}{2\lambda}$. La matrice H non dipende dal segno di λ .

Nelle applicazioni si ha interesse a porre H sotto la forma $I - \frac{1}{\beta} \mathbf{v}\mathbf{v}^T$, con

$\mathbf{v} = 2\lambda\mathbf{w} = \mathbf{x} - \alpha\mathbf{y}$ e $\beta = 2\lambda^2 = \alpha^2 - \alpha(\mathbf{x}^T \mathbf{y})$, che evita di dover estrarre una radice quadrata per calcolare λ . In generale non si ha bisogno di calcolare H esplicitamente, ma solamente di poter calcolare il trasformato di un generico vettore \mathbf{z} , cioè:

$$H\mathbf{z} = \mathbf{z} - \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T \mathbf{z}}{\beta}$$

Tale risultato è ottenuto calcolando dapprima $\gamma = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{z}}{\beta}$ e poi $H\mathbf{z} = \mathbf{z} - \gamma\mathbf{v}$.

Metodo di Householder.

Sia A una matrice quadrata scritta in termini di vettori colonna

$$A = A^{(1)} = [\mathbf{a}_1^{(1)} \dots \mathbf{a}_n^{(1)}]$$

È possibile costruire la matrice elementare di *Householder* H_1 tale che

$$H_1 \mathbf{a}_1^{(1)} = k_1 \mathbf{e}_1$$

Si genera in tal modo la prossima matrice della successione

$$A^{(2)} = H_1 A^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{(2)} & \dots & \mathbf{a}_n^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{0} & \widehat{A}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Successivamente, si consideri la sottomatrice $n - 1$

$$\widehat{A}^{(2)} = [\widehat{\mathbf{a}}_2^{(2)} \dots \widehat{\mathbf{a}}_n^{(2)}]$$

E si costruisca il riflettore elementare di dimensione $n - 1$ tale che

$$\widehat{H}_2 \widehat{\mathbf{a}}_2^{(2)} = k_2 \mathbf{e}_1$$

A tal punto, si orli la matrice \widehat{H}_2 con una riga e una colonna della matrice identità al fine di raggiungere la dimensione n

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \widehat{H}_2 \end{bmatrix}$$

E si moltiplichi a sinistra per $A^{(2)}$

$$A^{(3)} = H_2 A^{(2)} = \begin{bmatrix} k_1 & \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{0} & \widehat{H}_2 \widehat{A}^{(2)} \end{bmatrix}$$

E così via. Se A è quadrata, l'algoritmo termina al passo $n - 1$ con la matrice triangolare superiore

$$R = A^{(n)} = H_{n-1} A^{(n-1)} = H_{n-1} \dots H_1 A^{(1)} = Q^T A$$

La matrice ortogonale

$$Q = H_1 \dots H_{n-1}$$

essendo prodotto di matrici ortogonali implica

$$A = QR$$

che costituisce la fattorizzazione QR di A secondo *A. Householder*.

Esperimento su Matlab.

In questo esperimento su Matlab è stato implementato un sistema sovra-determinato di equazioni lineari ($m > n$); più precisamente con $m = 200$ ed $n \in [1,87]$ attraverso un ciclo `for`.

```
A=rand(m,n);  
x=rand(n,1);  
b=A*x;
```

La prima parte effettua la risoluzione del sistema in senso classico di cui sono stati calcolati il numero di condizionamento, l'errore assoluto (ovviamente nullo) e la condizione di varianza minima.

```
N=norm(A*x-b);  
M=min(N);  
C(n)=cond(A)  
E(n)=norm(x-x)
```

Successivamente è stata introdotta una “piccola” perturbazione sui dati ($1 \cdot 10^{-3}$)

```
b1=b+(1e-03)*rand(m,1);
```

ed è stato risolto il sistema mediante la fattorizzazione di Cholesky e QR.

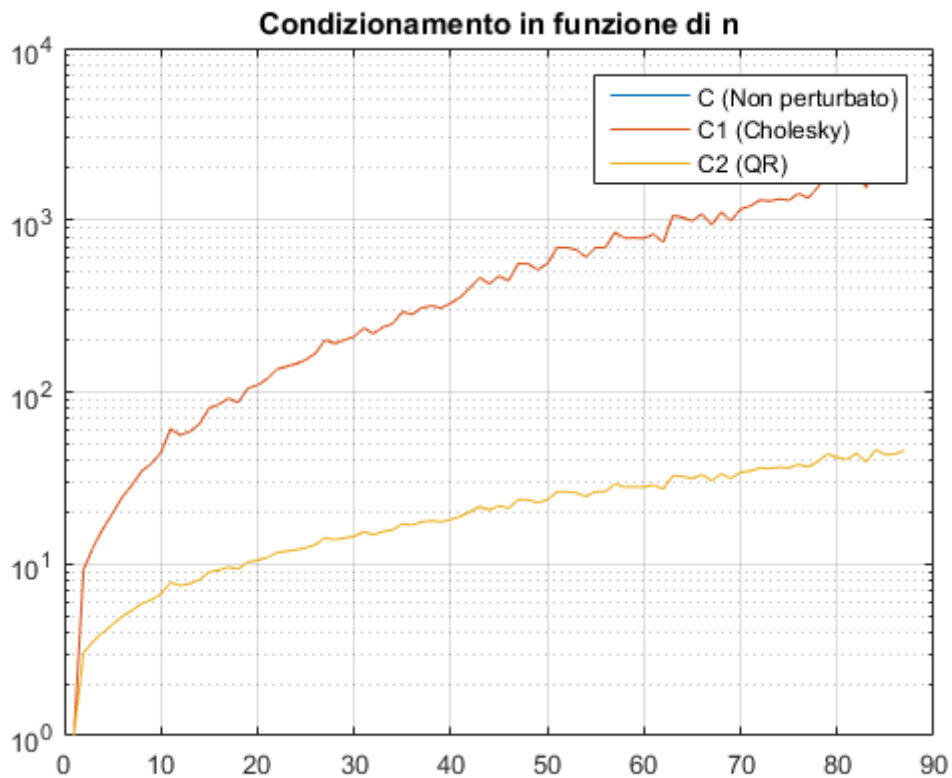
```
%% Cholesky factorization  
R1=chol(A'*A);  
y=R1'\(A'*b1);  
x1=R1\y;  
N1=norm(A*x-b1);  
M1=min(N1);  
C1(n)=cond(A'*A)  
E1(n)=norm(x-x1)  
  
%% QR factorization  
[Q,R]=qr(A);  
t=Q'*b1;  
x2=R\t;  
N2=norm(Q*R*x-b1);  
M2=min(N2);  
C2(n)=C(n)+tand(asin(N/norm(b1,2)))*(C(n))^2  
E2(n)=norm(x-x2)
```

Anche in questo caso sono stati calcolati: l'errore assoluto, il numero di condizionamento e la condizione di varianza minima; in particolar modo, nella fattorizzazione QR, il numero di condizionamento è stato determinato tramite la formula ai minimi quadrati.

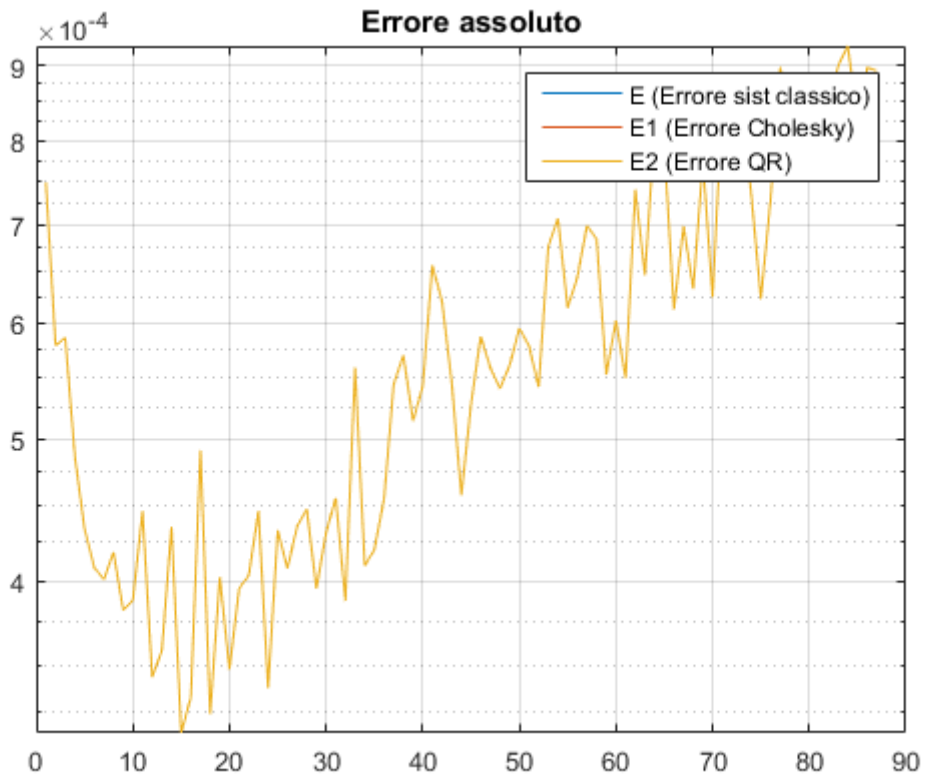
Infine, è stata implementata una matrice mal-condizionata, del tipo di Hilbert, e si è notato come sia sufficiente una “piccola” dimensione affinché il sistema risultasse irrisolvibile.

```
H=hilb(n);  
x3=rand(n,1)  
h=H*x3;  
  
N3=norm(H*x-h);  
M3=min(N3);  
C3=cond(H)  
E3=abs(x-x3)
```

Al termine sono stati eseguiti due grafici in scala semilogaritmica: nel primo grafico, relativo ai condizionamenti del sistema, si nota che due di loro (C e $C2$) coincidono per il fatto che il sistema è compatibile, e quindi il termine noto appartiene all'immagine di A .



Nel secondo grafico sono stati rappresentati gli errori assoluti del sistema e, anche in questo caso, due di essi coincidono (*E1 ed E2*).



Di seguito è riportato l'intero codice implementato:

```

clc; clear all;
m=200; nmax=87;
C= zeros (nmax,1);
C1= zeros (nmax,1);
C2= zeros (nmax,1);
C3=zeros (nmax,1);
E= zeros (nmax,1);
E1= zeros (nmax,1);
E2= zeros (nmax,1);
%% Metodi di risoluzione
for n=1:nmax;
    %% Caso di soluzione in senso classico
    %%Si introducano A e x di un sistema sovradeterminato%
    %%Si consideri il caso di soluzione in senso classico%
    A=rand(m,n);
    x=rand(n,1);
    b=A*x; %b è il vettore dei termini noti%
    %M rappresenta la condizione di varianza N minima%
    N=norm(A*x-b);
    M=min(N);
    %C indica il condizionamento di A%
    C(n)=cond(A)
    %E indica l'errore assoluto%
    E(n)=norm(x-x)
    %% Caso "lievemente" perturbato
    %%Sia introdotta una "piccola" perturbazione sui dati%
    b1=b+(1e-03)*rand(m,1);
    %% Cholesky factorization
    R1=chol(A'*A);
    y=R1'\(A'*b1);
    x1=R1\y;
    N1=norm(A*x-b1);
    M1=min(N1);
    C1(n)=cond(A'*A)
    E1(n)=norm(x-x1)
    %% QR factorization
    [Q,R]=qr(A);
    t=Q'*b1;
    x2=R\t;
    N2=norm(Q*R*x-b1);
    M2=min(N2);
    C2(n)=C(n)+tand(asin(N/norm(b1,2)))*(C(n))^2
    E2(n)=norm(x-x2)
end
%% Si introduca una matrice di Hilbert.
%%Si noti come sia sufficiente una "piccola" dimensione %
% affinché il sistema sia irrisolvibile.%
H=hilb(n);
x3=rand(n,1);
h=H*x3; %h è il vettore dei termini noti%
N3=norm(H*x-h);
M3=min(N3);
C3=cond(H)
E3=norm(x-x3)
%% Grafici
figure(1)
semilogy([C C1 C2]);
grid;
title('Condizionamento in funzione di n');
legend('C (Non perturbato)', 'C1 (Cholesky)', 'C2 (QR)');
figure(2)

```

```
semilogy([E E1 E2]);  
grid;  
title('Errore assoluto');  
legend('E (Errore sist classico)', 'E1 (Errore Cholesky)', 'E2 (Errore QR)');
```