



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

---

FACOLTÀ DI INGEGNERIA  
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

**DECONVOLUZIONE REGOLARIZZATA  
CON APPLICAZIONI AL  
GROUND PENETRATING RADAR**

Tesi di Laurea Triennale

**Relatore:**  
Prof. Giuseppe Rodriguez

**Candidato:**  
Antonio Altana

**Correlatore:**  
Prof. Gian Piero Deidda

Anno Accademico 2012/2013

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Ground Penetrating Radar</b>	<b>4</b>
2.1	Fondamenti . . . . .	4
2.2	Teoria dei campi elettromagnetici . . . . .	5
2.3	Parametri di misura nei sistemi GPR . . . . .	7
2.4	Modalità di misurazione dei sistemi GPR . . . . .	11
2.4.1	Identificazione di strati nel sottosuolo . . . . .	11
2.4.2	Identificazione di oggetti nel sottosuolo . . . . .	12
2.5	Elaborazione dei dati nel GPR . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Deconvoluzione</b>	<b>16</b>
3.1	Deconvoluzione nel dominio della frequenza . . . . .	18
3.1.1	Impostazione del problema . . . . .	18
3.1.2	Risoluzione tramite metodo di interpolazione . . . . .	20
3.1.3	Risoluzione tramite whitening . . . . .	21
3.2	Deconvoluzione nel dominio del tempo . . . . .	22
3.2.1	Richiami di integrazione lineare . . . . .	23
3.2.2	Risoluzione della deconvoluzione . . . . .	29
3.3	Comparazione tra i metodi di deconvoluzione nel dominio del tempo e della frequenza . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Regolarizzazione</b>	<b>40</b>
4.1	Problemi mal-posti . . . . .	40
4.2	Decomposizione a valori singolari SVD . . . . .	41
4.3	Metodo TSVD . . . . .	43
4.4	Scelta del parametro di regolarizzazione . . . . .	45
4.4.1	Principio di discrepanza . . . . .	46
4.4.2	Generalized cross-validation GCV . . . . .	46
4.4.3	Curva-L . . . . .	47

<i>INDICE</i>	2
<b>5 Elaborazione di dati sperimentali</b>	<b>49</b>
<b>6 Conclusione</b>	<b>57</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

La vastità del campo di applicazione e la precisione ottenibile rendono i sistemi GPR i più utilizzati quando è necessaria un'analisi del terreno o la ricerca di obiettivi nel sottosuolo. I primi utilizzi dei sistemi GPR risalgono agli anni '60 ma la capacità di costruire antenne più compatte, componenti analogici più stabili e l'aumento della capacità di elaborazione dei computer ne hanno incrementato le potenzialità e di conseguenza diffuso l'utilizzo.

I sistemi GPR vengono utilizzati in ambito archeologico in quanto permettono di conoscere sia le caratteristiche del suolo che la posizione di eventuali reperti sotterranei, permettendo quindi di trovare il punto esatto dove effettuare gli scavi; vengono utilizzati anche in ambito militare per cercare la presenza di ordigni o mine e per le indagini negli edifici in quanto il segnale inviato riesce a propagarsi nelle pareti di cemento e in particolare nel caso degli edifici storici dove è possibile fare rilevamenti senza dover effettuare scavi.

Un famoso utilizzo del GPR risale al 1992, quando è stato utilizzato dalla polizia per ritrovare \$150'000 che il rapitore Michael Sams aveva ricevuto come riscatto.

Questo lavoro di tesi si propone di illustrare in modo generale il funzionamento della tecnica GPR e principalmente il problema legato alla ricostruzione dei dati del suolo a partire dai dati ricevuti dall'antenna tramite la *deconvoluzione*, paragonando diversi metodi tramite delle simulazioni e presentando un'applicazione pratica su dati sperimentali reali.

# Capitolo 2

## Ground Penetrating Radar

### 2.1 Fondamenti

Il Ground Penetrating Radar (GPR) è una tecnica di analisi non distruttiva, cioè una tecnica che non richiede l'alterazione o l'asporto di un campione dalla struttura da esaminare, usata nel campo della geosifica che permette di dedurre le caratteristiche del primo sottosuolo utilizzando i campi elettromagnetici.

Tale metodo si basa sullo studio dell'onda elettromagnetica riflessa dal terreno per dedurre la struttura e le proprietà dei materiali presenti nel suolo[1]. Un'antenna, solitamente posta in prossimità della superficie, emette un segnale che si propaga attraverso il suolo, quando il segnale incontra un'interfaccia con un materiale che presenta proprietà fisiche diverse viene in parte riflesso, tornando verso la superficie dove sarà rilevato dall'antenna ricevente, e in parte trasmesso oltre l'interfaccia attraverso il materiale dove potrà essere riflesso da altre eventuali discontinuità.

Il segnale riflesso sarà facilmente riconoscibile in quanto presenterà un forma simile a quella del segnale emesso.

Il range di frequenze in cui lavora il GPR varia dai pochi MHz alle decine di GHz; la scelta della frequenza del campo emesso incide sulla massima profondità raggiungibile e sulla risoluzione dei dati ricavati. Ad esempio in ingegneria civile è necessaria un'analisi preliminare prima della costruzione di una galleria e la frequenza operativa dei sistemi GPR usati è di qualche decina di MHz in quanto deve arrivare in profondità per studiare la natura e le caratteristiche del substrato; in ambito militare invece per l'individuazione delle mine la frequenza utilizzata arriva a qualche GHz in quanto l'oggetto da rilevare è di dimensioni ridotte e si trova poco in profondità[6].

## 2.2 Teoria dei campi elettromagnetici

Il funzionamento del GPR si basa sulla teoria dei campi elettromagnetici. Le **leggi di Maxwell** descrivono il comportamento del campo elettrico e magnetico in relazione alle cariche e alle correnti:

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t}$$

$$\nabla \circ \mathbf{d} = \rho$$

$$\nabla \circ \mathbf{b} = 0$$

in cui  $\mathbf{e}$  é il vettore campo elettrico [ $\frac{V}{m}$ ],  $\mathbf{b}$  é il vettore induzione magnetica [ $\frac{Wb}{m^2}$ ],  $\mathbf{h}$  é il vettore intensità magnetica [ $\frac{A}{m}$ ] e  $\mathbf{d}$  é il vettore induzione elettrica [ $\frac{C}{m^2}$ ].

Le **relazioni costitutive** rappresentano come si comporta un materiale quando viene sollecitato da un campo elettromagnetico:

$$\mathbf{d} = \varepsilon \mathbf{e}$$

$$\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e}$$

con  $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$  e  $\mu = \mu_r \mu_0$  dove  $\varepsilon_0$  e  $\mu_0$  sono rispettivamente la costante dielettrica e la permeabilità magnetica nel vuoto:

$$\varepsilon_0 = 8.85 \frac{pF}{m}$$

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{H}{m}$$

con  $\varepsilon_r$  e  $\mu_r$  dette costante dielettrica e permeabilità magnetica del materiale che presentano un valore diverso specifico per ogni materiale. Nel GPR il campo si propaga nel suolo come un onda; la soluzione più semplice delle equazioni di Maxwell considerando il mezzo di trasmissione isotropo, non dispersivo e lineare è detta *onda piana*. L'onda piana è caratterizzata da componenti di campo elettrico e magnetico ortogonali tra loro e alla direzione di propagazione dell'onda con velocità

$$V_p = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{K}} \quad (2.1)$$

dove  $K$  è la costante dielettrica del mezzo e  $c$  è la velocità della luce  $3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ . Il rapporto tra il modulo del campo elettrico e il modulo del campo magnetico è dimensionalmente un'impedenza ed è strettamente correlata alla velocità di propagazione dell'onda stessa; è definita come *impedenza caratteristica* del mezzo ed è pari a:

$$Z = \frac{|\mathbf{e}|}{|\mathbf{h}|} = \mu V_p = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\zeta}{\sqrt{K}} \quad (2.2)$$

nel caso in cui il mezzo fosse il vuoto  $\zeta$  è l'impedenza del vuoto per cui  $\varepsilon = \varepsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$  e la velocità di propagazione equivale alla velocità della luce  $c$  ottenendo  $\zeta = 377\Omega$ . Partendo dalle equazioni di Maxwell e le relazioni costitutive possiamo ottenere tutte le leggi necessarie a comprendere i fenomeni elettromagnetici.

Quando un'onda incontra l'interfaccia di un materiale con costante dielettrica diversa produce un'onda che si trasmette oltre l'interfaccia e un'onda che viene riflessa. In caso di incidenza ortogonale l'onda riflessa si muove sulla stessa direzione dell'onda incidente ma con verso opposto e l'onda trasmessa continua nella stessa direzione dell'onda incidente; il rapporto tra l'ampiezza dell'onda riflessa e quella incidente è detto *coefficiente di riflessione*  $\Gamma$  definito come

$$\Gamma = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_1 + \zeta_2} \quad (2.3)$$

$$\frac{\mathbf{E}_r}{\mathbf{E}_i} = \Gamma \quad (2.4)$$

$$\frac{\mathbf{E}_t}{\mathbf{E}_i} = \Gamma + 1 \quad (2.5)$$

Nel caso in cui l'incidenza con la discontinuità non sia ortogonale la **legge di Snell** permette di determinare la direzione in cui si propagheranno l'onda trasmessa e l'onda riflessa in base all'angolo di incidenza dell'onda incidente sull'interfaccia, in tal caso si decompone l'onda in due opportune polarizzazioni (TE, TM) tra loro ortogonali, si calcola l'interazione di entrambe con l'interfaccia e si sommano i risultati ottenuti, per ognuna delle due polarizzazioni si trova un coefficiente di riflessione, **formule di Fresnel**, che consente di conoscere l'ampiezza dell'onda riflessa e trasmessa.

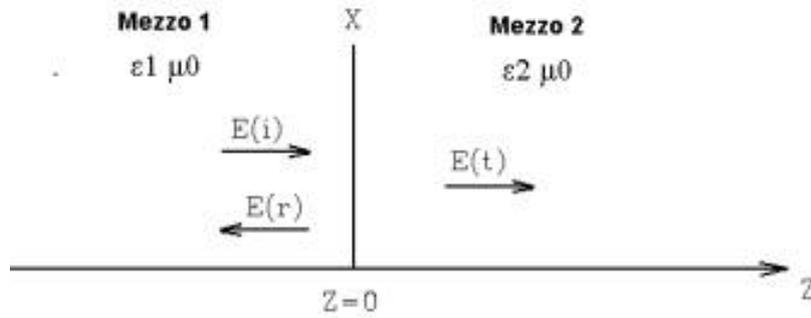


Figura 2.1: Caso di incidenza ortogonale.

## 2.3 Parametri di misura nei sistemi GPR

Le due parti fondamentali dei sistemi GPR sono l'unità di temporizzazione e l'antenna, la prima controlla la generazione e la ricezione del segnale creato e captato dalla seconda.

Il GPR è utilizzato per rilevare oggetti che possono trovarsi da pochi centimetri fino a centinaia di metri sotto terra ma è necessario configurare il sistema appositamente per la misura che si vuole effettuare tenendo conto della profondità che si vuole raggiungere e della risoluzione che si vuole ottenere.

L'attenuazione del segnale è dovuta all'energia dispersa quando si incontra una materiale con perdite e cresce al crescere della frequenza, per questo motivo usando una frequenza elevata non riusciamo a raggiungere profondità elevate ma in compenso otteniamo una risoluzione migliore. La lunghezza d'onda  $\lambda = \frac{V_p}{f_c}$  deve essere comparabile alla dimensione dell'oggetto che vogliamo trovare per capirne la struttura ma deve anche essere più grande (solitamente un fattore 10) della grandezza delle particelle contenute nel terreno altrimenti l'energia dissipata da queste non rende riconoscibile l'oggetto che stiamo cercando. Per lo stesso motivo il nostro obiettivo deve avere una dimensione maggiore della grandezza media delle particelle del terreno.

Per poter rilevare correttamente il segnale riflesso dobbiamo dimensionare appositamente la finestra di osservazione, cioè l'intervallo di tempo che intercorre tra l'invio del segnale e la ricezione delle risposta del terreno, considerando la profondità massima che vogliamo raggiungere e la velocità minima

di propagazione nel mezzo che possiamo incontrare:

$$W = 1.3 \frac{2 \cdot \text{profondità massima}}{\text{velocità minima}} = \frac{[m]}{[m/ns]} = [ns] \quad (2.6)$$

la formula tiene conto di eventuali variazioni di profondità o velocità allargando del 30% la finestra.

La risoluzione del GPR è composta da due parti: la risoluzione verticale  $\Delta r$ , cioè la capacità di vedere distinte le riflessioni del tetto e del letto di un substrato o le riflessioni di due oggetti posti uno al disotto dell'altro, e la risoluzione laterale  $\Delta l$ , che definisce quanto due punti riflettenti situati orizzontalmente possono essere vicini senza che vengano confusi come un unico punto. Stiamo considerando sistemi in cui viene inviato un impulso e viene rilevato il relativo eco per cui l'intervallo tra l'invio di due impulsi deve essere tale da rendere riconoscibile la risposta relativa ad ogni impulso, infatti inviando due impulsi a distanza troppo ravvicinata i contributi si sommano e le due risposte diventano indistinguibili; un impulso è caratterizzato dalla sua larghezza a metà ampiezza  $W_h$ , due impulsi vengono considerati distinti se separati almeno da questo valore.

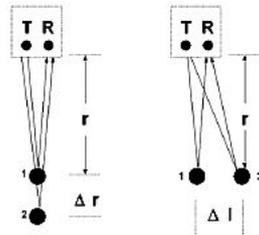


Figura 2.2: Risoluzione rispetto a due obiettivi.

Consideriamo due oggetti che si trovano a profondità diverse: il primo a profondità  $r$  e il secondo  $r + \Delta r$ ; il tempo necessario a rilevare gli oggetti sarà :

$$t_1 = \frac{2r}{V_p}; \quad t_2 = \frac{2r + 2\Delta r}{V_p}; \quad (2.7)$$

l'intervallo tra i due impulsi

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2\Delta r}{V_p}$$

dovrà essere maggiore della metà della larghezza a metà ampiezza degli impulsi, per cui

$$\Delta r > \frac{W_h \cdot V_p}{4}$$

La risoluzione laterale è teoricamente indipendente dalla profondità ma la dispersione dovuta a materiali con perdite la peggiora, come per il caso della risoluzione di profondità consideriamo due oggetti ma questa volta alla stessa profondità e distanziati lateralmente di  $\Delta l$ ; il tempo per rilevare il primo oggetto resta invariato uguale alle equazione (2.7), invece il tempo per rilevare il secondo varia

$$t_2 = \frac{2 \cdot (r^2 + \Delta l^2)^{\frac{1}{2}}}{V_p}$$

per cui l'intervallo tra gli impulsi sarà

$$\Delta t = \frac{2 \cdot [(r^2 + \Delta l^2)^{\frac{1}{2}} - r]}{V_p}$$

solitamente l'obiettivo è lontano dall'antenna per cui si può fare l'approssimazione  $\Delta t \approx \frac{\Delta l^2}{V_p r}$  e la risoluzione laterale risulta

$$\Delta l > \sqrt{\frac{V_p r W_h}{2}}$$

e diminuisce all'aumentare della distanza. La larghezza dell'impulso a metà ampiezza è strettamente collegata alla banda passante  $W_h = \frac{1}{B}$ .

Dobbiamo tener conto della misura che vogliamo effettuare per scegliere la configurazione del sistema più adatta; nei sistemi GPR è uso pratico considerare che la risoluzione di profondità dovrebbe essere circa un centesimo della profondità massima raggiungibile  $\Delta r \approx \frac{d_{max}}{100}$ ; esprimendo la risoluzione in relazione alla banda passante  $\Delta r > \frac{V_p}{4B}$  otteniamo la condizione da soddisfare per la banda passante dello strumento:

$$B \geq \frac{V_p}{4\Delta r} = \frac{25V_p}{d_{max}}$$

e nella maggior parte dei casi si sceglie la frequenza centrale  $f_c = B$  o comunque in modo che il rapporto tra banda passante e frequenza centrale sia compreso nell'intervallo

$$0.5 \leq \frac{B}{f_c} \leq 1.5$$

La scelta della frequenza centrale è un compromesso tra risoluzione e profondità raggiungibile; se necessario si preferisce aumentare la massima profondità raggiungibile a discapito della risoluzione perchè sarebbe inutile poter

vedere bene un oggetto se non riesco neanche a raggiungerlo. La risoluzione desiderata  $\Delta z$  (di profondità o laterale) e la formazione del suolo impongono due limiti alla scelta della frequenza

- per avere la risoluzione spaziale desiderata dobbiamo soddisfare:

$$f_c^R > \frac{75}{\Delta z \sqrt{K}} MHz$$

con  $\Delta z$  espressa in metri e  $K$  costante dielettrica del materiale;

- la formazione del suolo impone un limite superiore alla frequenza, infatti per le ragioni spiegate i precedenza, con una frequenza troppo alta non sono distinguibili le particelle del terreno dall'obiettivo cercato:

$$f_c^C < \frac{30}{\Delta L \sqrt{K}} MHz$$

dove  $\Delta L$  è la dimensione delle particelle nel terreno.

Per cui dobbiamo scegliere  $f_c$  in modo da rispettare i vincoli:

$$f_c^R < f_c < f_c^C$$

La frequenza centrale detta un vincolo sulla frequenza di campionamento del segnale ricevuto, ponendo che il sistema lavori con un'ampiezza di banda pari a  $1.5 f_c$  il *Teorema di Nyquist* impone una frequenza di campionamento di almeno il doppio della frequenza massima, per cui  $3f_c$ , ma è buona norma usare almeno  $6f_c$ ; da questo otteniamo che la distanza tra i campioni deve essere

$$\Delta t_s = \frac{1}{6f_c}$$

## 2.4 Modalità di misurazione dei sistemi GPR

### 2.4.1 Identificazione di strati nel sottosuolo

Solitamente nei sistemi GPR l'antenna di trasmissione e l'antenna di ricezione sono nello stesso blocco quindi ad una distanza ravvicinata costante per tutta la linea lungo la quale viene effettuata la misurazione e presupponendo che le interfacce di discontinuità siano orizzontali possiamo approssimare che la misura venga effettuata senza off-set, cioè il segnale viene trasmesso da una posizione, si propaga nel suolo e il segnale riflesso viene ricevuto nella stessa posizione da cui è stato trasmesso; per cui l'incidenza dell'onda è ortogonale rispetto all'interfaccia e possiamo utilizzare le equazioni (2.3)-(2.4). Se conoscessimo la velocità di propagazione nel terreno otterremmo la costante dielettrica del materiale che compone lo strato attraversato e la profondità a cui si trova l'interfaccia usando le equazioni (2.1)-(2.2).

Nella maggior parte dei casi la velocità di propagazione non è nota a priori ed è necessario ricavarla da misurazioni complementari multi-offset, vedi Figura 2.3. Vengono effettuate più misurazioni tenendo l'antenna trasmittente in posizione fissa e allontanando l'antenna ricevente ad ogni misurazione di una distanza fissa.

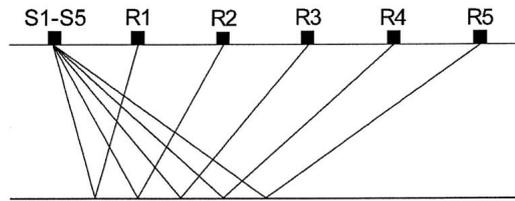


Figura 2.3: Misurazioni multi-offset.

I dati ricevuti andranno a disegnare una curva in quanto nella prima posizione il percorso antennaTX-interfaccia-antennaRX è il più breve e aumenta man mano che l'antenna ricevente viene spostata. La curva disegnata è una iperbole secondo l'equazione

$$T = \sqrt{\frac{x^2}{V_p^2} + T_0^2} \quad (2.8)$$

dove  $T_0$  è il tempo trascorso tra l'invio e la ricezione del segnale nel caso di incidenza ortogonale,  $x$  è la distanza tra antennaTX e antennaRX e  $V_p$  è la

velocità di propagazione nel materiale. Il valore di  $V_p$  corretto è quello per cui l'iperbole diventa una retta e si trova facilmente passando un intervallo di valori di velocità plausibili a un calcolatore che sostituisce il valori nell'equazione (2.8) fino a trovare quello esatto. Nota la velocità di propagazione oltre a poter calcolare le caratteristiche del suolo possiamo trovare la profondità a cui si trova l'interfaccia considerando che

$$T_0 = \frac{2 \cdot P_d}{V_p} \quad (2.9)$$

in cui  $P_d$  è la profondità a cui si trova l'interfaccia.

### 2.4.2 Identificazione di oggetti nel sottosuolo

Se durante una misurazione lungo una linea prima di un interfaccia troviamo un oggetto nel sottosuolo questo verrà visualizzato come in Figura 2.4 dove

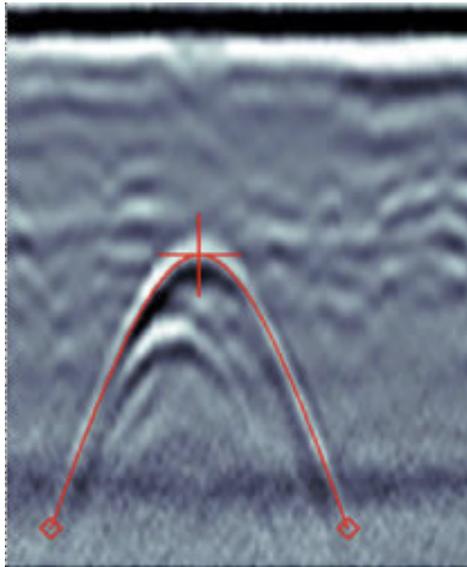


Figura 2.4: Iperbole di un oggetto.

il vertice dell'iperbole rappresenta il punto dove si trova l'oggetto. I dati ottenuti disegnano un iperbole perché quando ci troviamo esattamente sopra l'oggetto il tempo impiegato dall'onda per percorrere il tragitto antennaTX-oggetto-antennaRX sarà il minore possibile, allontanandoci gradualmente dall'oggetto la distanza da percorrere per l'onda aumenta e di

conseguenza anche il tempo che passa tra l'invio dell'onda e la ricezione dell'onda riflessa. A differenza del caso dell'individuazione dell'interfaccia non è necessario fare altre misure per ricavare la velocità di propagazione; l'equazione che descrive l'iperbole in Figura 2.4 è l'equazione (2.8) ma per trovare il valore esatto della velocità non bisogna cercare quello che fa diventare l'iperbole una retta ma quello che approssima meglio la forma dell'iperbole in Figura 2.4. Valgono le stesse considerazioni fatte nel caso precedente, conoscendo l'onda riflessa e la velocità possiamo ricavare le caratteristiche dell'oggetto e la profondità a cui si trova tramite le equazioni (2.1)-(2.4).

## 2.5 Elaborazione dei dati nel GPR

In un sistema GPR ideale il segnale ricevuto dall'antenna dovrebbe essere digitalizzato ad alta frequenza con convertitori A/D a range dinamico, memorizzato elaborato e mostrato sul display; nella realtà ciò non è possibile perché non esistono convertitori A/D a range dinamico con un tasso di conversione così elevato. Il modo comune per ovviare a questo problema consiste nel memorizzare la risposta del suolo senza digitalizzarla direttamente ma ad una frequenza più bassa di quella del segnale. Questa soluzione può essere implementata secondo le diverse modalità elencate di seguito:

- **Correlation-Based**, in questi sistemi viene generato un segnale random a banda larga che va in ingresso a un correlatore dove viene moltiplicato per il segnale ricevuto dall'antenna e integrato; il risultato di questa operazione è un segnale a bassa frequenza che può essere convertito e memorizzato. Nel sistema un controllo logico varia il ritardo di tempo nel segnale di riferimento in base al segnale ricevuto dall'antenna, tale ritardo modifica la tensione in uscita del correlatore in corrispondenza del segnale ricevuto. L'uscita del correlatore è il risultato della *convoluzione* tra la risposta impulsiva del suolo, le caratteristiche dell'antenna e l'autocorrelazione del segnale di riferimento;
- **Frequency-Domain mixer GPR**, questa tecnica è implementata tramite l'uso di un mixer e un filtro passa basso per ottenere in uscita una tensione con frequenza pari alla differenza tra le frequenze di due segnali sinusoidali in ingresso. Il segnale di riferimento è controllato in frequenza e va in ingresso al mixer insieme al segnale ricevuto dall'antenna; filtrando il segnale di riferimento in frequenza con uno sfasamento di  $\frac{\pi}{2}$  è possibile misurare i segnali ricevuti che sono modulati in ampiezza con il segnale di riferimento. Facendo variare la frequenza si ottiene la funzione di trasferimento del suolo moltiplicata per la caratteristica dell'antenna nell'intervallo delle frequenze, questa potrà poi essere trasformata con Fourier nella risposta impulsiva del suolo convoluta con la risposta impulsiva dell'antenna.
- **Equivalent Time-Sampling GPR**, l'onda di riferimento generata ha una forma e un contenuto in frequenza specifico. Il sistema di acquisizione è collegato a un campionatore composto da uno switch controllato per commutare ogni  $ndT$  istanti e un condensatore; quando l'interruttore è chiuso il condensatore si carica grazie alla tensione applicata ai suoi capi, la tensione di uscita è proporzionale all'integrale della tensione di ingresso nell'intervallo di tempo in cui l'interruttore è rimasto

chiuso, se l'intervallo di interruzione è sufficientemente grande rispetto al tempo di variazione del segnale possiamo considerare la tensione in uscita pari alla tensione nell'istante  $ndt$ -esimo. Il segnale viene campionato a diversi intervalli di tempo e il risultato è una replica del segnale ad alta frequenza che può essere convertito. Il segnale risultante è la versione campionata dell'uscita del trasmettitore convoluta con la risposta impulsiva del suolo e dell'antenna. In un sistema ideale l'uscita del trasmettitore dovrebbe essere una funzione  $\delta$  e il segnale ricevuto quindi essere solo la convoluzione tra la risposta dell'antenna e del suolo.

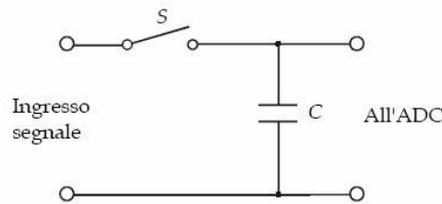


Figura 2.5: Sample & Holder.

In linea teorica tutti e tre i metodi dovrebbero fornire i medesimi risultati ma nella realtà la differente realizzazione circuitale e la non linearità dei componenti analogici comporta problemi e prestazioni differenti. La maggiormente usata è la tecnica ETS sia per quanto riguarda l'onere computazionale in quanto fornisce dati che necessitano di meno elaborazione, sia per quanto riguarda la robustezza nonostante la non linearità dei componenti.

Il modello più semplice per rappresentare il segnale ricevuto, e comune alle tre tecniche presentate precedentemente, consiste nel considerare il segnale ricevuto  $r(t)$  come la convoluzione tra l'uscita del trasmettitore e la risposta impulsiva dell'antenna  $a(t)$ , la risposta impulsiva del suolo  $g(t)$  e nel caso di utilizzo del Correlation-Based method la funzione di autocorrelazione  $p(t)$ :

$$r(t) = g(t) * a(t) * p(t)$$

Il prossimo capitolo tratterà i metodi di isolamento della risposta del suolo dal segnale ricevuto.

# Capitolo 3

## Deconvoluzione

È utile ricordare la definizione di convoluzione, di trasformata di Fourier e il teorema che le lega:

**Definizione 3.1** *Siano  $f$  e  $g$  due funzioni integrabili in  $\mathbb{R}$ . Ad esse è associabile la funzione, anch'essa integrabile in  $\mathbb{R}$ ,*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

*definita **convoluzione** della  $f$  e della  $g$  nel senso della trasformata di Fourier.*

**Definizione 3.2** *La **trasformata di Fourier** di una funzione  $f$  definita su tutto l'asse reale è la funzione*

$$\mathcal{F}\{f\} = F(k) = \hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)dx$$

*definita nello spazio delle frequenze. Per **trasformata inversa di Fourier** di intende la funzione*

$$\mathcal{F}^{-1}\{F\} = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} F(k)dk$$

*definita nello spazio ordinario*

**Teorema 3.1** *Se  $f$  e  $g$  sono dotate di trasformata di Fourier, anche la loro convoluzione è dotata di trasformata e tra esse vale la seguente relazione*

$$\mathcal{F}\{f * g\} = F(k)G(k)$$

In parole povere il teorema dice che alla convoluzione tra due funzioni nel tempo equivale il prodotto tra le due funzioni nella frequenza.

Come introdotto nel capitolo precedente i dati ricevuti sono il risultato della convoluzione tra la risposta impulsiva dell'antenna, l'uscita del trasmettitore e la risposta impulsiva del suolo.

$$r(t) = g(t) * a(t)$$

- $r(t)$  è il segnale ricevuto;
- $g(t)$  è la risposta impulsiva del suolo;
- $a(t)$  è la convoluzione tra l'uscita del trasmettitore e la risposta impulsiva dell'antenna;

Passando nel dominio della frequenza tramite la trasformata di Fourier l'espressione precedente diventa

$$R(\omega) = G(\omega)A(\omega)$$

dove  $\omega$  rappresenta la frequenza angolare e le lettere maiuscole indicano le funzioni di trasferimento.

L'obiettivo principale nei sistemi GPR è quello di ricavare la risposta impulsiva  $g(t)$  dai dati ricevuti dall'antenna; l'estrazione di questi dati è detta **deconvoluzione**.

In questo lavoro di tesi ho affrontato il problema della deconvoluzione sia nel dominio della frequenza, risolvendo il problema attraverso l'espressione

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{R(\omega)}{A(\omega)} \right\} \quad (3.1)$$

che nel dominio del tempo, risolvendo l'equazione integrale

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)a(\tau)d\tau \quad (3.2)$$

Verranno esposti preliminarmente due metodi per la deconvoluzione in frequenza e due metodi per la deconvoluzione nel dominio nel tempo per poi confrontare i risultati ottenuti nelle simulazioni.

### 3.1 Deconvoluzione nel dominio della frequenza

L'apparente semplicità dell'equazione (3.1) nasconde il problema principale della deconvoluzione; non è così immediato ricavare la risposta del suolo perché la funzione di trasferimento dell'antenna può presentare dei valori nulli in corrispondenza dei quali la risposta del suolo non è definita e i dati ottenuti dalla deconvoluzione non hanno nessuna relazione con la risposta del suolo. La soluzione più immediata sembrerebbe fare in modo che la risposta impulsiva dell'antenna sia esattamente un impulso, cioè una delta  $\delta$  di Dirac la cui trasformata di Fourier è  $\mathcal{F}\{\delta\} = 1$  per cui otterremmo

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{R(\omega)\} = r(t)$$

Non è fisicamente possibile generare un segnale come la  $\delta$  di Dirac poiché questa per definizione ha durata nulla, ampiezza infinita; ma esistono strumenti che approssimano questa soluzione generando una *wavelet*  $w(t)$  compatta nel tempo, chiamati Ultra Wide Band (UWB) RADARs e il primo obiettivo degli sviluppatori di questo tipo di sistema è proprio quello di creare wavelet sempre più brevi. Da ora in poi considereremo solo questi sistemi e per chiarezza effettuo un cambio di notazione:  $A(\omega) \rightarrow W(\omega)$   
Data l'approssimazione il problema degli zeri a denominatore non è ancora risolto.

#### 3.1.1 Impostazione del problema

Per questa tesi ho utilizzato due wavelet di forma diversa:

- una funzione seno;
- una funzione che crea un'onda M;

e ho studiato due metodi per risolvere il problema:

1. l'interpolazione dei campioni;
2. l'aggiunta di rumore bianco a denominatore ;

Ho impostato un sistema nel modo seguente:

$$\mathbf{W}g = \underline{r} \tag{3.3}$$

per effettuare le simulazioni, dove  $\mathbf{W}$  è una matrice di Toeplitz<sup>1</sup> creata campionando la wavelet ad intervalli regolari,  $\underline{r}$  è un vettore colonna contenente i campioni del segnale ricevuto e  $\underline{g}$  è un vettore colonna contenente la risposta impulsiva del suolo incognita. Segnale ricevuto e wavelet sono campionati alla stessa frequenza.

I dati a me noti sono nel dominio del tempo, la prima cosa da fare è passare al dominio della frequenza tramite la trasformata di Fourier. I dati raccolti sono i campioni delle funzioni, quindi dati discreti per cui utilizzo la **DFT Discrete Fourier Transform**

**Definizione 3.3** *La trasformata discreta di Fourier DFT associa al vettore  $x(n)$  con  $n=0, \dots, N-1$  il vettore  $X(k)$  con  $k=0, \dots, N-1$  nel seguente modo:*

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i \frac{2\pi}{N} kn}$$

con  $k=0, 1, \dots, N-1$ .

La trasformata discreta di Fourier è lineare e invertibile e la sua inversa detta antitrasformata **IDFT** è data da:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{i \frac{2\pi}{N} kn}$$

con  $n=0, 1, \dots, N-1$

Per calcolare direttamente la sommatoria sarebbero necessarie una quantità di operazioni  $O(N^2)$ ; ma utilizzando la **Fast Fourier Transform FFT**, un algoritmo ottimizzato per calcolare la DFT e la IDFT, il numero di operazioni si riduce a  $O(N \log(N))$ .

---

<sup>1</sup>Una matrice di Toeplitz è una matrice  $T_n = [t_{k,j}; k, j = 0, 1, \dots, n-1]$  dove  $t_{k,j} = t_{k-j}$ , nella parte che tratterà la deconvoluzione nel tempo spiegherò perché è lecito usarla

### 3.1.2 Risoluzione tramite metodo di interpolazione

Esaminiamo il metodo di interpolazione dei campioni per ovviare al problema degli zeri nella funzione di trasferimento della wavelet. Per la simulazione impostiamo come soluzione prefissata  $\hat{g}$  per esempio il campionamento di una Gaussiana e calcoliamo tramite il sistema (3.3) il termine noto  $\underline{r}$ . Passo al dominio della frequenza tramite la DFT, calcolata usando la FFT. Provando a risolvere direttamente l'equazione (3.1) MATLAB restituisce un vettore composto da Inf e NaN; niente a che fare con la nostra gaussiana.

La funzione di trasferimento della wavelet  $W(\omega)$  presenta più valori nulli in corrispondenza dei quali il rapporto  $\frac{R(\omega)}{W(\omega)}$  avrà valore indeterminato.

Il metodo consiste nel sostituire i valori Inf con l'interpolazione quadratica dei valori adiacenti. Per prima cosa cerco gli indici nel vettore  $W(\omega)$  in cui sono contenuti i valori nulli, calcolo vettore  $G(\omega)$  contenente il rapporto componente per componente tra il vettore dei termini noti  $R(\omega)$  e il vettore  $W(\omega)$ . Ora sostituisco i valori del vettore  $G(\omega)$  in corrispondenza degli indici trovati precedentemente con l'interpolazione quadratica dei quattro valori precedenti e dei quattro valori successivi, nel caso l'indice indichi la prima o l'ultima posizione sostituisco con il valore adiacente. l'ultima operazione necessaria per ottenere la risposta del suolo  $g(t)$  è antitrasformare il vettore  $G(\omega)$ .

Il metodo di interpolazione è una sorta di *regolarizzazione* in quanto elimina gli elementi nulli che non danno contributo di informazione ma creano problemi in fase di risoluzione; il problema principale di questo metodo sta nel fatto che bisogna avere informazioni preliminari sul tipo di forma d'onda che dovremmo ottenere perché nel caso in cui nella funzione di trasferimento ci fossero più valori nulli adiacenti il metodo non sarebbe utilizzabile, e i dati ottenuti non sarebbero corretti.

### 3.1.3 Risoluzione tramite whitening

Come nel metodo esposto precedentemente impostiamo un vettore soluzione  $\hat{g}$ , per esempio sempre la stessa Gaussiana, e calcoliamo il termine noto  $r$  usando il sistema (3.3). Passiamo nel dominio della frequenza tramite la DFT, calcolata con l'algoritmo FFT e calcoliamo il vettore  $G(\omega) = \frac{R(\omega)}{W(\omega)}$ . Per risolvere il problema dei valori nulli nella funzione di trasferimento della wavelet aggiungiamo un rumore bianco  $\eta$ , cioè costante a tutte le frequenze, a denominatore:

$$G(\omega) = \frac{R(\omega)}{W(\omega)} \implies G(\omega) = \frac{R(\omega)}{W(\omega) + \eta}$$

e calcolo la IDFT di  $G(\omega)$  per ricavare la risposta impulsiva del suolo  $g(t)$ . La risoluzione tramite aggiunta di rumore bianco a denominatore è la tecnica più usata per risolvere la deconvoluzione nel dominio della frequenza perché non necessita di informazioni note a priori dell'onda, può essere utilizzata per qualsiasi funzione di trasferimento.

### 3.2 Deconvoluzione nel dominio del tempo

Risolvere una deconvoluzione nel tempo significa risolvere l'*equazione integrale* (3.2). In questo caso i problemi sono causati dal cattivo condizionamento della matrice necessaria a risolvere l'equazione integrale; il condizionamento della matrice peggiora all'aumentare della durata della wavelet  $w(t)$  e analogamente a quanto detto per il dominio della frequenza si cerca di approssimare la wavelet con un impulso. Per questo consideriamo i sistemi UWB e come fatto per il dominio della frequenza cambiamo notazione:

$$r(t) = g(t) * w(t) = w(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t - \tau)g(\tau)d\tau \quad (3.4)$$

lecita in quanto si può dimostrare che la convoluzione gode della proprietà commutativa.

Per risolvere la deconvoluzione è necessaria una prima approssimazione: utilizzando una finestra di misurazione abbastanza ampia posso considerare che il segnale dopo un certo intervallo di tempo vada a zero e quindi limitare il calcolo dell'integrale nell'intervallo di tempo in cui il segnale non è nullo. Tenendo conto dell'approssimazione l'integrale (3.4) diventa:

$$r(t) = \int_{-A}^A w(t - \tau)g(\tau)d\tau \quad (3.5)$$

e si tratta di risolvere una **equazione integrale** dove la incognita è  $g(t)$ .

### 3.2.1 Richiami di integrazione lineare

#### Formule di quadratura

Le formule di quadratura sono metodi per approssimare il calcolo di un integrale definito[7]; vengono utilizzate quando

- La primitiva della funzione integranda non può essere espressa in termini di funzioni elementari come

$$\int_a^b e^{-x^2} dx$$

- Si conoscono solo valori discreti della funzione integranda, come succede nei dati sperimentali
- Si cerca la soluzione di un'equazione integrale

Esaminiamo il caso in cui si debba calcolare l'integrale definito

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

consideriamo  $n + 1$  punti nell'intervallo  $[a, b]$

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$$

e il valore della funzione  $f(x_k)$  in questi punti è noto. Calcoliamo l'integrale come

$$I(f) = \sum_{k=0}^n \alpha_k f(x_k) + R_n(f) = Q_n(f) + R_n(f)$$

dove la sommatoria  $Q_n(f)$  è la formula di quadratura e  $R_n(f)$  rappresenta il residuo, cioè l'errore. Nella formula di quadratura i termini  $\alpha_k$  sono detti **pesi** e i punti  $x_k$  sono detti **nodi**. Se gli estremi dell'intervallo di integrazione sono nodi la formula si dice **chiusa**, altrimenti è detta **aperta**.

Per sapere se una formula di quadratura tende verso il valore dell'integrale dobbiamo studiarne la *convergenza*

**Definizione 3.4** La formula di quadratura  $Q_n$  si dice **convergente** se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f) = 0$$

**Definizione 3.5** La formula di quadratura  $Q_n$  ha grado di precisione  $p$  se

$$\begin{cases} Q_n(x^k) = \int_a^b x^k dx & k=0, \dots, p \\ Q_n(x^{k+1}) \neq \int_a^b x^{k+1} dx & k > p \end{cases}$$

**Teorema 3.2** Se la serie  $\{Q_n\}$

1. ha grado di precisione  $n$

2.  $\sum_{k=0}^n |\alpha_k| < \infty$

allora la serie  $\{Q_n\}$  è **convergente**.

Esistono diversi metodi per creare una formula di quadratura, ad esempio il **metodo dei coefficienti indeterminati** consiste nel scegliere arbitrariamente i nodi e determinare i pesi in modo che la formula di quadratura abbia precisione  $n$ ; ma questo metodo non è efficiente dal punto di vista computazionale in quanto crea una matrice dei coefficienti mal-condizionata per cui i risultati sono inaccurati per valori di  $n$  elevati. Per superare tale problema si possono usare le **formule di quadratura interpolatorie**, che si ottengono sostituendo la funzione da integrare con un polinomio di grado  $n$  che la interpola su  $n + 1$  nodi prefissati. Le formule di quadratura interpolatorie sono classificate in base alla scelta dei nodi:

- formule di **Newton-Cotes**, dove i punti di quadratura sono equispaziati;
- formule **Gaussiane**, dove i punti di quadratura sono gli zeri di un polinomio ortogonale.

Il nostro problema di deconvoluzione tratta segnali misurati da uno strumento e campionati ad una certa frequenza, quindi avremo dati discreti ad intervalli regolari per cui la scelta più ovvia è quella di usare una formula di Newton-Cotes.

Denotiamo i nodi di quadratura come

$$x_k = x_0 + kh, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

dove:

- nei metodi **chiusi**

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad n \geq 1$$

- nei metodi **aperti**

$$x_0 = a + h, \quad x_n = b - h, \quad h = \frac{b - a}{n + 2} \quad n \geq 0$$

L'idea per costruire un metodo di quadratura consiste nell'approssimare la funzione integranda con il polinomio interpolante di Lagrange

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x)$$

dove

$$L_k = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Per cui

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b p_n(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^n L_k(x) f(x_k) dx \\ &= \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_a^b L_k(x) dx = \sum_{k=0}^n \alpha_k f(x_k) \end{aligned}$$

dove

$$\alpha_k = \int_a^b L_k(x) dx$$

Formule di quadratura per  $n = 0$ ,  $n = 1$ ,  $n = 2$

- **regola del rettangolo**  $n = 0$

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(a)$$

- **regola del trapezio**  $n = 1$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b - a}{2} [f(a) + f(b)]$$

- **regola di Simpson**  $n = 2$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b - a}{6} [f(a) + 4f(\frac{a + b}{2}) + f(b)]$$

Formule così semplici non hanno una precisione elevata per funzioni complicate e si potrebbe pensare di aumentare  $n$  per migliorare i risultati ma sappiamo che l'interpolazione tra un numero elevato di nodi equispaziati non garantisce la convergenza dell'errore neanche per funzioni infinitamente derivabili. Per aumentare l'accuratezza è più pratico suddividere l'intervallo di integrazione in intervalli più piccoli dove supponiamo che la funzione sia abbastanza semplice da poter essere approssimata. La formula di quadratura composta più usata è quella dei trapezi:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$
$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)]$$

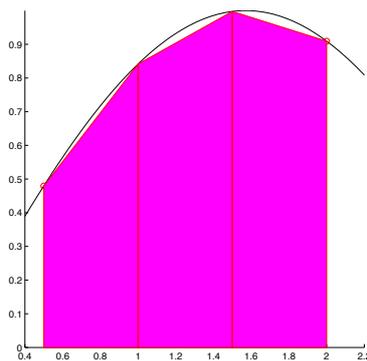


Figura 3.1: Quadratura tramite la formula dei trapezi.

## Equazioni integrali

Cosa è una equazione integrale?

**Definizione 3.6** *Si chiama equazione integrale ogni equazione in cui l'incognita compare sotto il segno di integrale*

Ad esempio  $f(y) + \int_a^b K(x, y)f(x)dx = g(y)$  dove  $K$  è detto *kernel* o *nucleo* e  $g(t)$  è il termine noto o *right-hand side*. Risolverla significa trovare una funzione  $f$  che soddisfa l'equazione integrale.

Le equazioni integrali vengono classificate in base all'intervallo di integrazione:

- **Equazioni integrali di Fredholm** dove gli estremi dell'intervallo di integrazione sono fissati, ad esempio

$$\int_a^b K(x, y)f(x)dx = g(y) \quad x \in [a, b] \quad (3.6)$$

$$f(y) + \int_a^b K(x, y)f(x)dx = g(y) \quad x \in [a, b] \quad (3.7)$$

- **Equazioni integrali di Volterra** dove gli estremi dell'intervallo di integrazione non sono fissati, ad esempio

$$\int_a^y K(x, y)f(x)dx = g(y) \quad x \in [a, b] \quad (3.8)$$

$$f(y) + \int_a^y K(x, y)f(x)dx = g(y) \quad x \in [a, b] \quad (3.9)$$

Le equazioni (3.6),(3.8) sono chiamate *equazioni integrali di prima specie* mentre le equazioni (3.7),(3.9) sono dette *equazioni integrali di seconda specie*. I due metodi principali per risolvere le equazioni integrali sono:

1. Il metodo di proiezione
2. Il metodo di Nyström.

Il metodo di proiezione si basa sull'idea di vedere l'equazione in uno spazio di dimensione finita e approssimare l'incognita con una combinazione lineare di una base appositamente scelta. Il metodo di Nyström si basa sulla discretizzazione dell'integrale; consideriamo l'equazione integrale (3.6) e la approssimiamo tramite una opportuna formula di quadratura

$$(K_n f)(y) = \sum_{j=0}^n \alpha_k K(x_j, y)f(x_j)$$

la soluzione dell'equazione è approssimata dalla soluzione del problema

$$(K_n f)(y) = g(y) \quad x \in [a, b] \quad (3.10)$$

a questo punto consideriamo l'equazione(3.10) calcolata nei punti di quadratura  $x_i \in [a, b]$  ottenendo

$$\sum_{j=0}^n \alpha_k K(x_j, x_i) f_n(x_j) = g(x_i)$$

che può essere espressa come un sistema lineare

$$\mathbf{K}_n \underline{f}_n = \underline{g} \quad (3.11)$$

dove  $\mathbf{K}_n$  è la matrice dei coefficienti,  $\underline{f}_n$  è il vettore delle incognite e  $\underline{g}$  è il vettore dei termini noti.

### 3.2.2 Risoluzione della deconvoluzione

In questo lavoro di tesi per risolvere l'equazione di deconvoluzione (3.5) ho utilizzato il metodo di Nyström tramite la formula di quadratura composta dei trapezi riferendomi ad una wavelet  $w(t)$  di due periodi centrata nell'origine.

Seguendo i passaggi del metodo di Nyström passo dall'equazione (3.5) a

$$\sum_{j=0}^n w(t - \tau_j)g(\tau_j) = r(t)$$

discretizzando l'integrale e

$$\sum_{j=0}^n \alpha_k w(t_i - \tau_j)g(\tau_j) = r(t_i)$$

approssimando la soluzione nei nodi di quadratura. Ottengo così il sistema

$$\mathbf{W}\underline{g} = \underline{r} \quad (3.12)$$

dove

$$\begin{aligned} \underline{r} &= [r(t_0), r(t_1), \dots, r(t_n)]^T \\ \underline{g} &= [g(\tau_0), g(\tau_1), \dots, g(\tau_n)]^T \\ \mathbf{W} &= \begin{bmatrix} \alpha_0 w(t_0 - \tau_0) & \alpha_1 w(t_0 - \tau_1) & \cdots & \alpha_n w(t_0 - \tau_n) \\ \alpha_1 w(t_1 - \tau_0) & \alpha_1 w(t_1 - \tau_1) & \cdots & \alpha_n w(t_1 - \tau_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n w(t_n - \tau_0) & \alpha_n w(t_n - \tau_1) & \cdots & \alpha_n w(t_n - \tau_n) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ma dato che i punti di quadratura corrispondono ai punti in cui ho campionato il segnale ricevuto  $t_i = \tau_i$  e sono equispaziati  $t_i - t_{i-1} = h$ , nel mio caso la matrice  $\mathbf{W}$  diventa:

$$\mathbf{W} = h \begin{bmatrix} w_0 & w_{-1} & \cdots & w_{-n} \\ w_1 & w_0 & \cdots & w_{1-n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ w_n & w_{n-1} & \cdots & w_0 \end{bmatrix}$$

dove  $w_{i,j} = w_{i-j} = w(t_i - t_j)$  e approssimando con  $h$  il peso del primo e del ultimo campione anche se dovrebbe essere  $\frac{h}{2}$ . La matrice è stata ottenuta campionando la wavelet  $w(t)$  in un intervallo di tempo simmetrico  $[-A, A]$  centrato nell'origine inserendo i campioni a partire dall'ultimo elemento della

prima riga  $w_{-n}$  procedendo verso sinistra fino all'elemento  $w_0$  corrispondente al campionamento nell'istante  $t = 0$  e proseguendo verso il basso fino all'elemento  $w_n$  contenente il campionamento nell'istante  $t = A$ .

$\mathbf{W}$  è la matrice che è stata utilizzata nelle simulazioni per risolvere la deconvoluzione tramite la trasformata di Fourier.

La matrice è stata creata a partire dalla stessa serie di valori campionati in due modi diversi:

- usando il comando standard di MATLAB `toeplitz` che crea una matrice *full* se gli vengono passati come parametri di ingresso, in ordine, il vettore contenente la prima colonna e il vettore contenente la prima riga;
- usando il comando `smtoepl` contenuto nel toolbox `SMT` per l'elaborazione di matrici strutturate sviluppato da Prof. Giuseppe Rodriguez e Prof.ssa Michela Redivo Zaglia che crea una matrice *non full* e permette di memorizzare i dati dell'intera matrice in due soli vettori, prima riga e prima colonna[10].

Esattamente come nella deconvoluzione in frequenza impostiamo una soluzione prefissata  $\hat{g}$ , troviamo il termine noto  $\hat{r}$  e risolviamo il sistema (3.12) a ritroso con due algoritmi diversi:

- con il metodo di **Gauss**, tramite la fattorizzazione  $\mathbf{PA}=\mathbf{LU}$ ;
- con l'algoritmo di **Schur** generalizzato (GSA) esclusivo per le matrici di **Toeplitz**;

I due metodi oltre ad avere un onere computazionale diverso come verrà spiegato nel prossimo paragrafo necessitano di una differente gestione dei dati, infatti il metodo di Gauss per salvare una matrice  $n \times n$  ha bisogno  $n^2$  valori che invece utilizzando il GSA diminuiscono a  $2n$  perché bastano la prima riga e la prima colonna.

### 3.3 Comparazione tra i metodi di deconvoluzione nel dominio del tempo e della frequenza

Per confrontare i risultati i ottenuti con i quattro metodi diversi ho effettuato diverse simulazioni al variare di parametri importanti nella misura:

1. numero di campioni  $N$ ;
2. rapporto tra la durata della finestra di misurazione  $\mathbf{A}$  e la durata della wavelet  $\mathbf{T}$ ;
3. perturbazione dei termini noti, attribuibile a errori di misura ed errori di memorizzazione;

esaminando delle caratteristiche fondamentali:

- errore tra la soluzione impostata e la soluzione trovata  $\|\hat{g} - g\|$
- tempi di risoluzione
- condizionamento della matrice

utilizzando le due wavelet diverse:

- un'onda seno;
- un'onda M;

e impostando due soluzioni con caratteristiche diverse:

- soluzione *smooth*, una funzione Gaussiana;
- soluzione *irregolare*, una serie di impulsi (caso realistico).

Le simulazioni seguenti sono state eseguite sia con l'onda seno che con l'onda M, scegliendo come soluzione impostata la Gaussiana. I dati riportati sono relativi alle simulazioni con l'onda seno ma sono indicativi per entrambe le wavelet.

### Numero di campioni

Aumentare o diminuire il numero di campioni comporta un miglioramento ovvero un peggioramento nella risoluzione del segnale da campionare, benché sia importante avere una informazione il più completa possibile sul segnale una numero troppo elevato di campioni non comporta automaticamente un miglioramento.

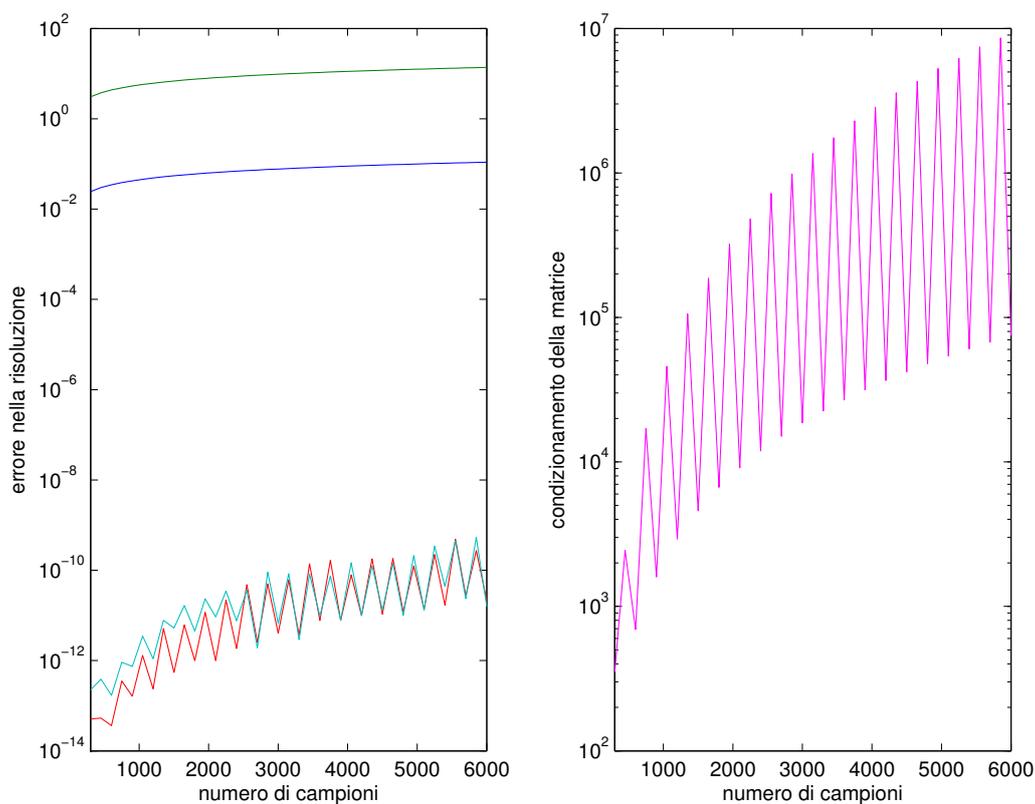


Figura 3.2: Variazione dei parametri in relazione all'aumento di campioni.

Metodo	Colore
Interpolazione	Blue
Whitening	Verde
Gauss	Rosso
Schur (GSA)	Turchese

La simulazione è stata effettuata ponendo la finestra di misurazione della durata di 20ns, la durata della wavelet 0.2ns, considerando i termini noti non perturbati da errore e facendo aumentare il numero di campioni da 300 a 6000 ad intervalli regolari di 150.

Vediamo in Figura 3.2 che nei metodi che utilizzano la FFT l'errore tra la soluzione impostata e quella trovata cresce lentamente all'aumentare dei campioni ed invece con i metodi di Gauss e GSA l'errore peggiora leggermente più velocemente all'aumentare di  $N$ , ma in particolare notiamo l'andamento crescente dei tempi di risoluzione al crescere di  $N$

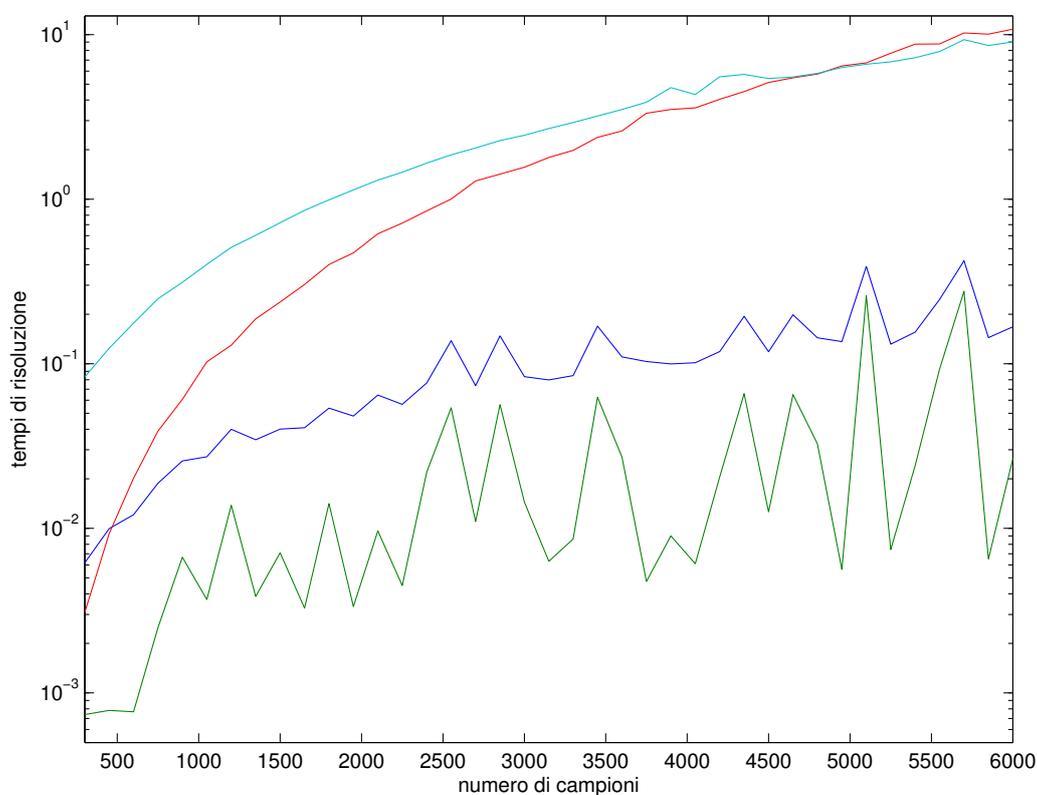


Figura 3.3: Variazione dei tempi di risoluzione in relazione all'aumento di campioni.

Per risolvere il sistema creato con 6000 campioni gli errori e i tempi di risoluzione sono stati i seguenti:

Metodo	Tempo [s]	Errore
Interpolazione	0.1676	0.1092
Whitening	0.0266	13.7294 <sup>2</sup>
Gauss	10.7845	2.1276 $10^{-11}$
GSA	9.0266	1.5423 $10^{-11}$

La grande differenza tra i tempi di risoluzione è dovuto alla complessità computazionale dei metodi. Risolvendo la deconvoluzione nel dominio della frequenza in sostanza è necessario eseguire tre trasformate di Fourier che se calcolate tramite l'algoritmo FFT richiedono  $N \log N$  operazioni quindi la complessità computazionale degli algoritmi è  $O(N \log N)$ . Per risolvere il sistema lineare 3.12 invece abbiamo bisogno di  $O(N^3)$  operazioni usando l'algoritmo di Gauss e  $O(N^2)$  operazioni usando l'algoritmo generalizzato di Schur. Questa differenza oltre a comportare l'aumento dei tempi di risoluzione peggiora la propagazione degli errori che crescono per ogni operazione eseguita. La propagazione degli errori non è legata solo al numero di operazioni necessarie a risolvere il problema ma anche al condizionamento della matrice che come si vede in fig.(3.2) cresce all'aumentare di  $N$ .

### Rapporto tra finestra di misurazione e durata della wavelet

Il condizionamento della matrice  $\mathbf{W}$  non è dovuto solo al numero dei campioni ma è fortemente dipendente dal rapporto tra  $A$ , la durata delle finestre di misurazione, e  $T$ , durata della wavelet. Come detto precedentemente non è possibile realizzare una wavelet che sia esattamente un impulso e la durata di questa influenza il condizionamento della matrice, infatti il condizionamento è basso se la wavelet risulta piccola rispetto alla finestra e peggiora se invece ne aumentiamo la durata.

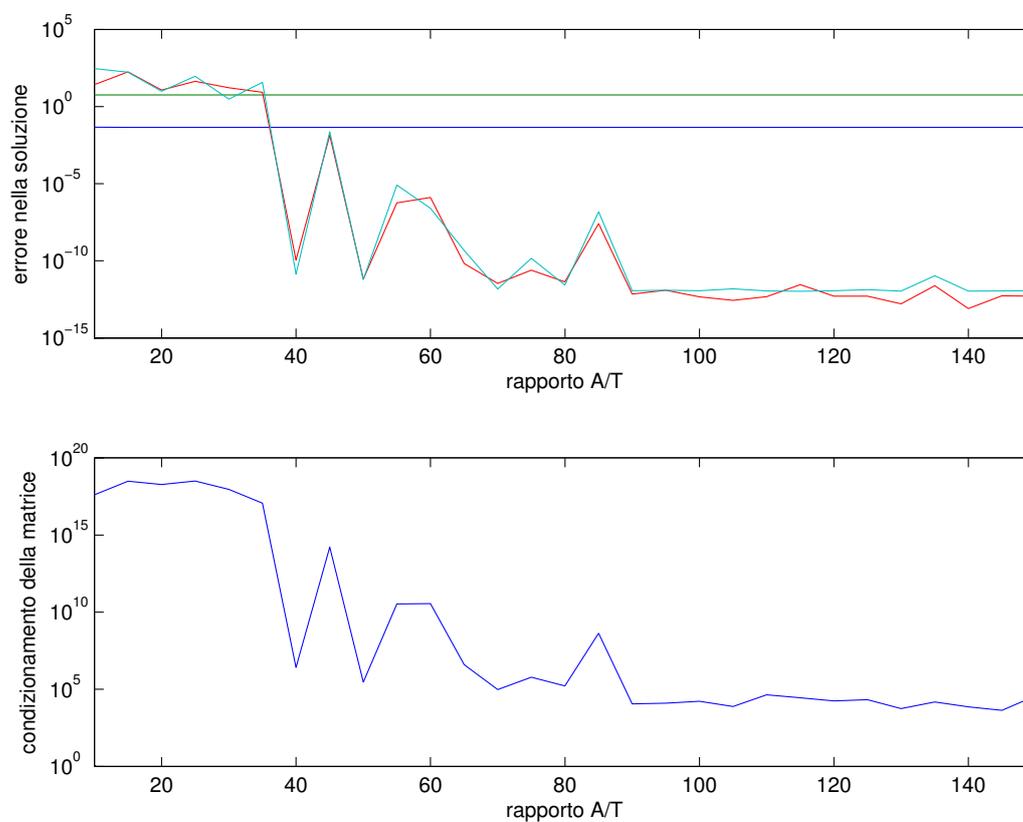


Figura 3.4: Variazione dei parametri in relazione all'aumento di campioni.

La simulazione è stata effettuata usando 1024 campioni, i termini noti non perturbati e facendo variare il rapporto delle durate di finestra e wavelet da 10 a 150.

Vediamo che quando la wavelet è solo 10 volte più breve della finestra di misurazione la matrice è molto mal condizionata e questo si trasforma in errore sulla soluzione trovata. Al crescere del rapporto il condizionamento migliora e infatti anche gli errori sulla soluzione diminuiscono; però in questa simulazione abbiamo considerato solo gli errori introdotti dalla memorizzazione nel computer, nei dati sperimentali le misure sono affette da errore anche dell'ordine di  $10^{-2}$  per cui un condizionamento di  $10^4$  provoca un'amplificazione dell'errore di  $10^2$ .

### Perturbazione dei termini noti

In tutti i casi precedenti abbiamo risolto la deconvoluzione usando il termine noto calcolato a partire dalla soluzione impostata; il termine noto nel nostro caso rappresenta il segnale ricevuto dall'antenna, per cui un valore misurato e come tale affetto da errore. Per la simulazione ho scelto il numero di campioni  $N=1024$  e il rapporto tra le durate di finestra e wavelet  $A/T=100$ , cioè valori per cui dalle simulazioni precedenti sappiamo che il sistema si risolve senza incorrere in grossi errori, e ho aggiunto al termine noto esatto un rumore Gaussiano di ampiezza compresa tra  $10^{-16}$ , equivalente al rumore di macchina, e  $10^{-2}$ .

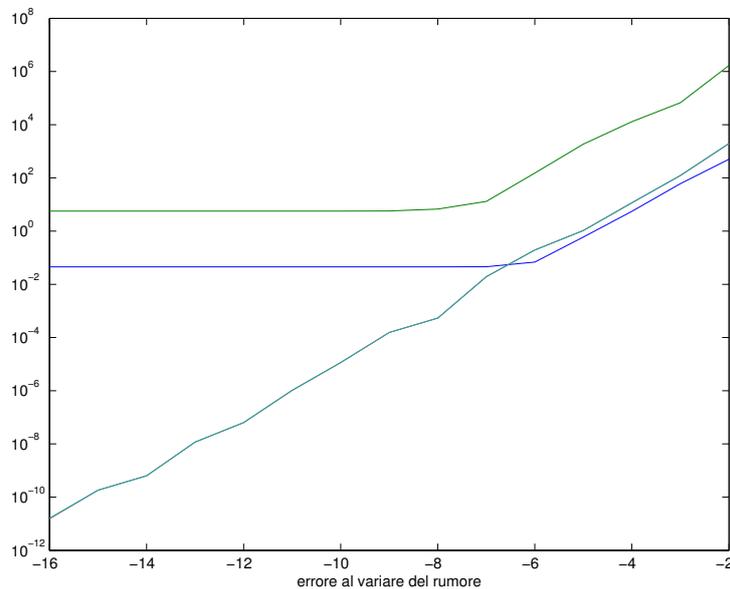


Figura 3.5: Variazione dell'errore sulla soluzione in relazione alla perturbazione dei termini noti.

Nel metodo di Gauss e GSA gli errori sulla soluzione vanno di pari passo crescendo proporzionalmente all'errore sui termini noti; risolvendo invece tramite whitening l'errore nella soluzione è inizialmente costante ma cresce poi linearmente quando la perturbazione dei termini noti diventa dimensionalmente paragonabile a  $\eta$  cioè il contributo aggiunto a denominatore per eliminare i valori nulli, utilizzando invece l'interpolazione gli errori sul termine noto devono crescere ancora per influenzare la soluzione.

**Test con funzione irregolare**

Utilizzando come soluzione impostata per le simulazioni una serie di impulsi dobbiamo differenziare il comportamento nel caso in cui si utilizzi la wavelet seno o la wavelet M. Utilizzando l'onda seno ha lo stesso comportamento descritto per la funzione Gaussiana.

Lasciando gli stessi parametri delle simulazioni precedenti ma usando la wavelet M i risultati peggiorano

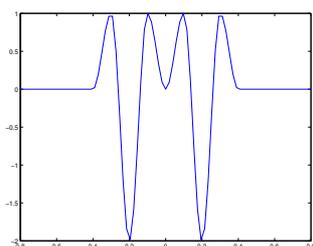


Figura 3.6: wavelet M.

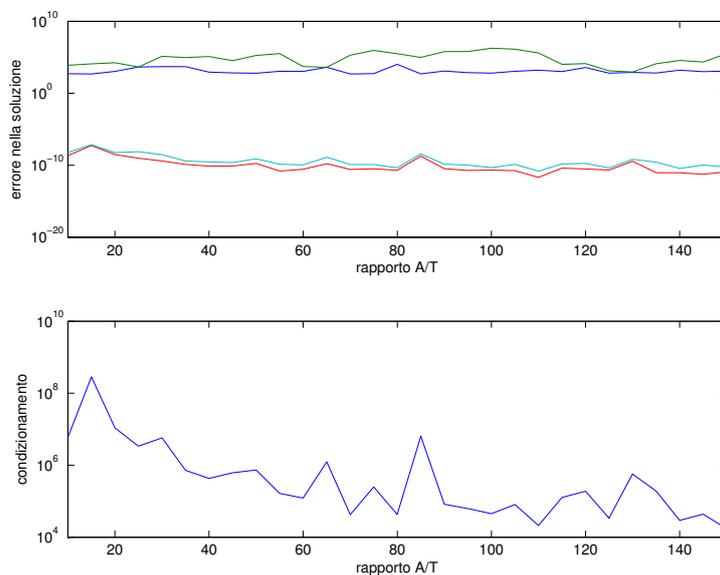


Figura 3.7: Variazione in relazione al rapporto A/T

L'errore nella soluzione trovata tramite la deconvoluzione in frequenza, sia tramite interpolazione che tramite whitening, è molto maggiore rispetto al caso precedente dove la soluzione impostata era regolare. La cosa interessante è che queste ultime simulazioni rappresentano la situazione più realistica dove la wavelet utilizzata non è un seno, le incognite sono funzioni irregolari e i dati ricevuti sono affetti da errore.

Per esempio simulando il sistema con un rapporto  $T/A = 30$  già quando l'errore sui dati è  $10^{-7}$  la soluzione trovata inizia a non essere precisa usando Gauss e GSA; e risulta completamente sbagliata risolvendo la deconvoluzione in frequenza.

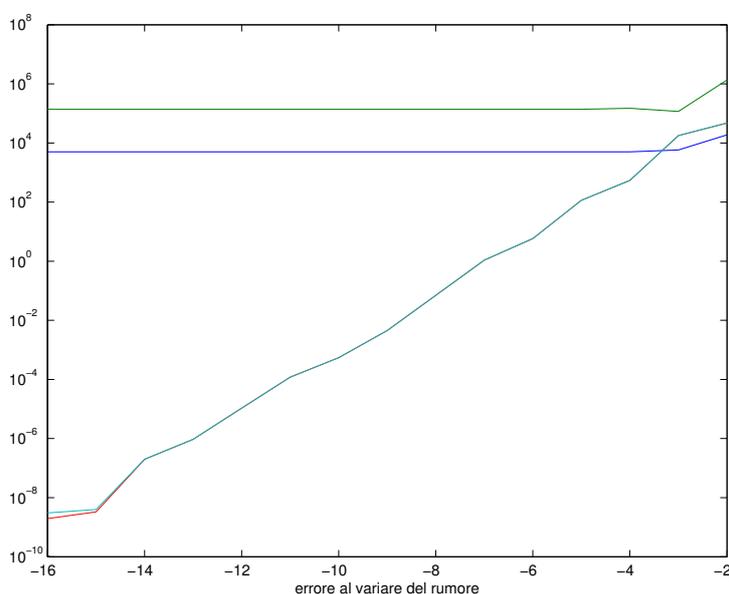


Figura 3.8: Errore con  $T/A=30$ .

Il prossimo capitolo discuterà i metodi di *regolarizzazione* che permettono di trovare una soluzione anche per problemi mal-posti come il caso della deconvoluzione.

# Capitolo 4

## Regolarizzazione

L'obiettivo dei metodi di regolarizzazione è permettere di trovare una soluzione approssimata a problemi mal-condizionati dove i metodi standard non riescono a trovare la soluzione[11]-[12].

### 4.1 Problemi mal-posti

**Definizione 4.1** *Un problema è **ben posto** se esso possiede, in un prefissato campo di definizione, una e una sola soluzione e questa dipende con continuità dai dati. In caso contrario, viene detto **mal posto**.*

Nel caso in cui la soluzione non dipenda con continuità dai dati, è possibile che anche una piccola perturbazione su di essi porti ad una soluzione diversa da quella esatta. Questo aspetto è fondamentale nell'ambito di dati sperimentali in quanto i dati misurati sono sempre affetti da errore. Il condizionamento misura quanto un errore nei dati possa essere amplificato nei risultati.

**Definizione 4.2** *Sia  $\delta_d$  una perturbazione dei dati  $d$  di un problema e sia  $\delta_x$  la corrispondente perturbazione sulla soluzione  $x$ . Sia inoltre  $\|\cdot\|$  una qualsiasi norma vettoriale. Il **numero di condizionamento assoluto**  $K=K(d)$  è definito dalla relazione*

$$\|\delta_x\| \leq K \|\delta_d\|$$

mentre il **numero di condizionamento relativo**  $k=k(d)$  verifica la disuguaglianza

$$\frac{\|\delta_x\|}{\|x\|} \leq k \frac{\|\delta_d\|}{\|d\|}$$

## 4.2 Decomposizione a valori singolari SVD

Sia  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  una matrice rettangolare con  $m \geq n$ . Allora la decomposizione a valori singolari della matrice  $A$  avrà la forma:

$$A = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \sigma_i \mathbf{v}_i^T \quad (4.1)$$

dove  $U = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$  e  $V = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$  sono matrici con colonne ortonormali,  $U^T U = V^T V = I_m$  e  $\Sigma = \mathbf{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  è una matrice diagonale con elementi non-negativi in ordine non-crescente

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$$

Questi  $\sigma_i$  sono i *valori singolari* di  $A$  e i vettori  $\mathbf{u}_i$  e  $\mathbf{v}_i$  sono rispettivamente i *vettori singolari* sinistri e destri di  $A$ . Il condizionamento della matrice equivale al rapporto tra il più grande valore singolare e il più piccolo non nullo  $\sigma_1/\sigma_n$ .

Non è provato in generale ma è molto frequente nei problemi mal posti trovare queste due caratteristiche:

- i valori singolari  $\sigma_i$  decadono a zero gradualmente senza salti, al crescere delle dimensioni della matrice aumenta il numero di valori singolari piccoli, vedi Figura 4.1;
- i vettori singolari destri  $\mathbf{v}_i$  e sinistri  $\mathbf{u}_i$  tendono ad avere più cambi di segno all'incrementarsi dell'indice  $i$ , cioè al decrescere di  $\sigma_i$ , vedi Figura 4.2.

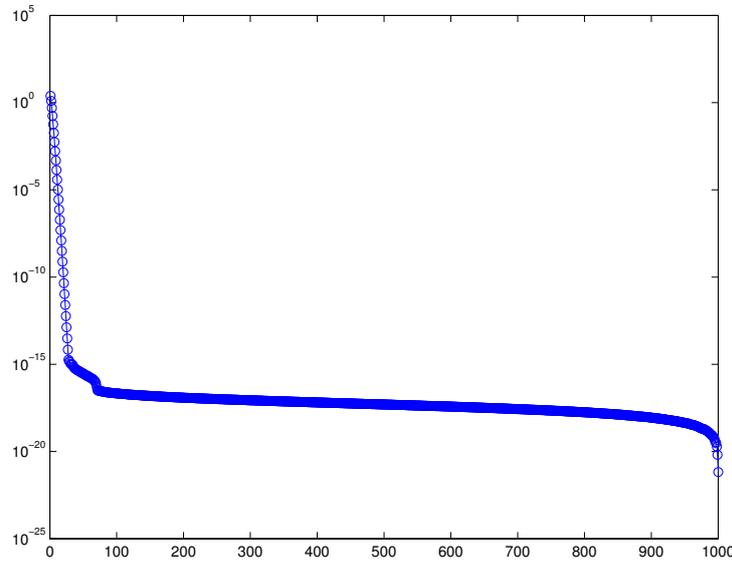


Figura 4.1: Decadimento valori singolari.

Uno o più valori singolari piccoli implicano che la matrice  $A$  è quasi *rank deficient* cioè non tutte le colonne di  $A$  sono esattamente linearmente indipendenti.

Consideriamo il sistema lineare mal condizionato

$$Ax = \mathbf{b} \quad (4.2)$$

e sostituiamo in esso la SVD di  $A$ :

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \sigma_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{x}_i = \mathbf{b}$$

dove  $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{b}} + \mathbf{e}$ ,  $\hat{\mathbf{b}}$  è il vettore dei termini noti esatto,  $\mathbf{e}$  è l'errore, possiamo risolvere il sistema tramite

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i$$

in presenza di uno o più valori singolari piccoli, dato che si trovano al denominatore, la norma  $\|\mathbf{x}\|_2$  cresce e aumenta l'amplificazione degli errori  $\mathbf{e}$ .

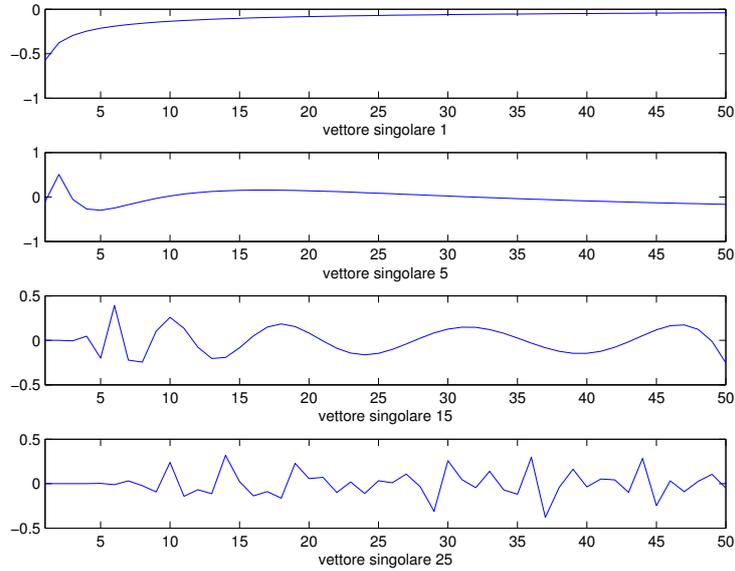


Figura 4.2: Aumento della frequenza nei vettori singolari.

### 4.3 Metodo TSVD

Consideriamo il sistema (4.2).

Il metodo **Truncated SVD** consiste nel sostituire la matrice mal condizionata con una matrice di rango minore  $k$  ben condizionata

$$A_k = \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i \sigma_i \mathbf{v}_i^T \quad k \leq n$$

e risolvere il sistema

$$A_k \mathbf{x}_k = \mathbf{b}$$

in modo da soddisfare due vincoli:

1.  $\min \|\mathbf{x}\|_2$
2.  $\min \|A_k \mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$

le soluzioni calcolate come

$$\mathbf{x}_k = \sum_{i=1}^k \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i$$

In questo modo il metodo TSVD non considera in valori singolari piccoli che creano problemi nella soluzione.

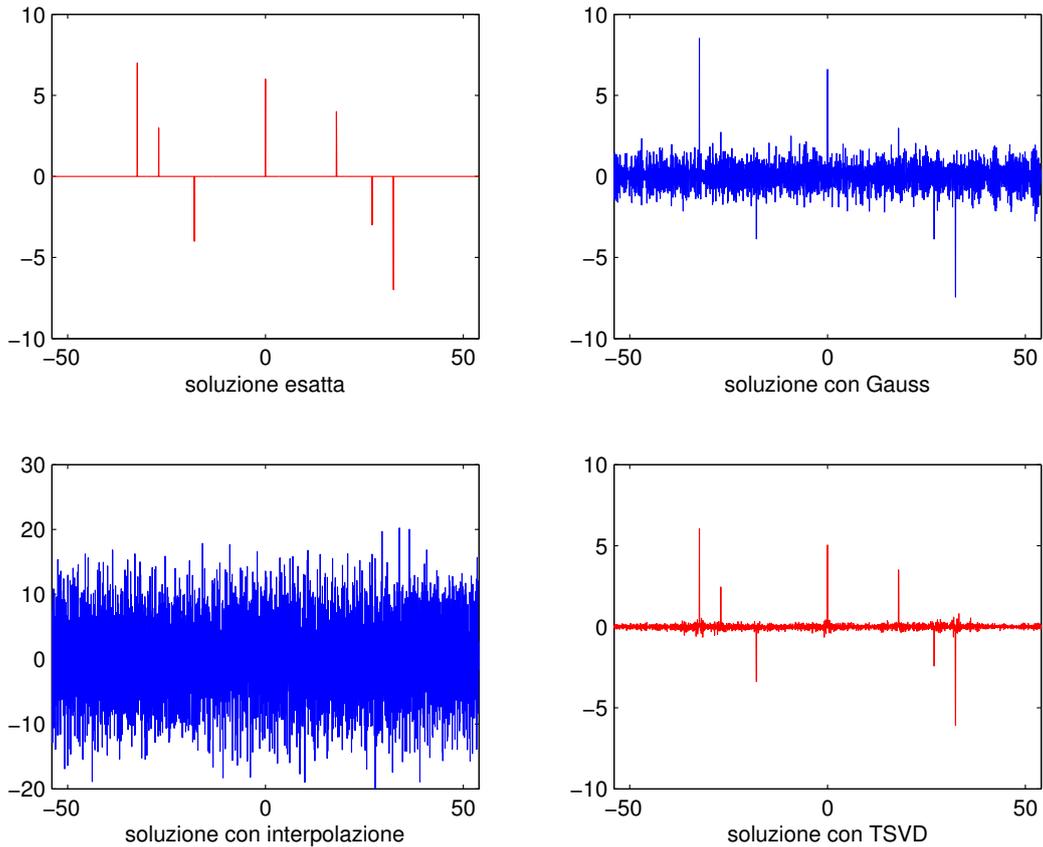


Figura 4.3: Soluzione esatta e calcolata con metodi diversi

In Figura sono riportate la soluzione impostata e la soluzione calcolata usando il metodo di Gauss per la deconvoluzione nel tempo, l'interpolazione per la deconvoluzione in frequenza e infine il metodo TSVD per regolarizzare il sistema lineare. La figura si riferisce alla simulazione di una misurazione su un terreno argilloso con costante dielettrica ( $K = 36$ ) con una profondità massima raggiungibile 2m; la velocità di propagazione nel terreno è  $V_p = 0.048m/ns$  e la frequenza del segnale inviato 600 MHz.

Il problema principale sta nella scelta del parametro di regolarizzazione  $k$ , i metodi per stimarlo sono divisi in due classi:

1. basati sulla conoscenza dell'errore  $\|\mathbf{e}\|_2$ ;
2. euristici, cioè non si basano sulla conoscenza a priori dell'errore.

## 4.4 Scelta del parametro di regolarizzazione

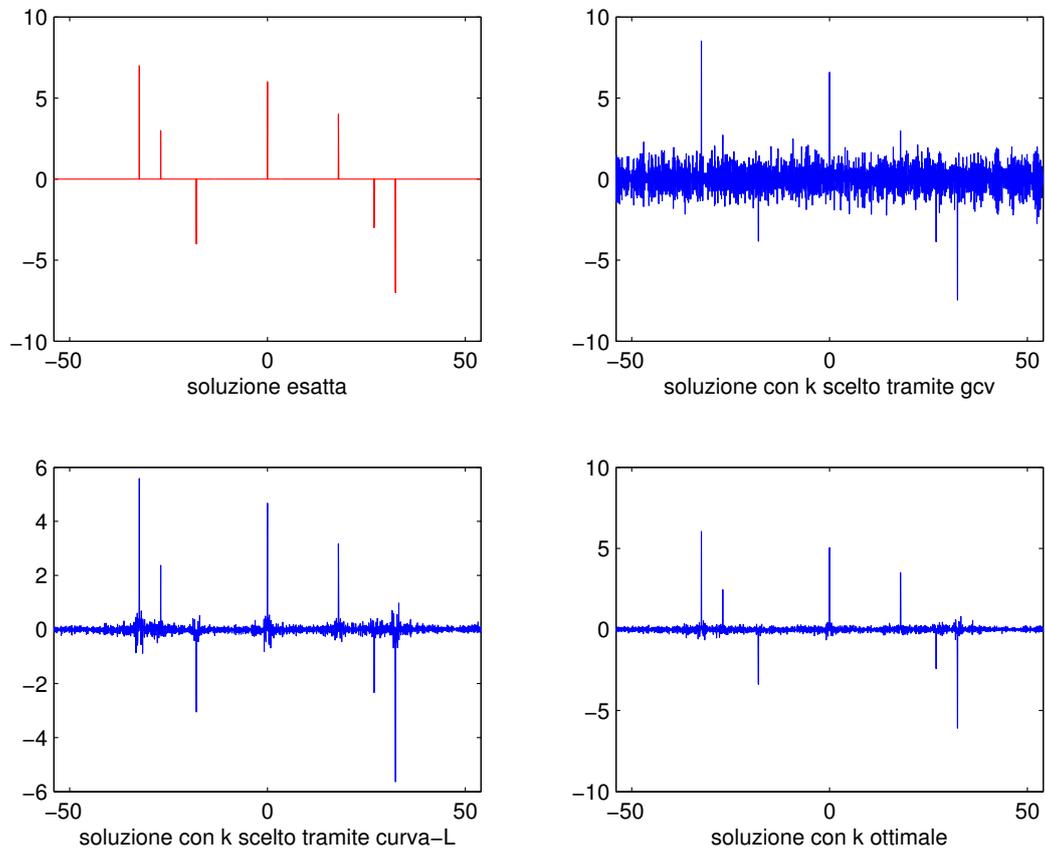


Figura 4.4: Soluzione esatta e calcolata tramite TSVD, con diversi parametri di regolarizzazione

### 4.4.1 Principio di discrepanza

Il principio di discrepanza è un metodo che appartiene alla prima classe e per la scelta del parametro di regolarizzazione sceglie il valore di  $k$  per cui è rispettata la condizione

$$\|A\mathbf{x}_k - \mathbf{b}\|_2 \simeq \|\mathbf{e}\|_2$$

che se si ha una buona stima dell'errore fornisce una buona regolarizzazione.

### 4.4.2 Generalized cross-validation GCV

Il metodo GCV per trovare il valore del parametro di regolarizzazione  $k$  sceglie il valore per cui è minima la funzione

$$G_k \equiv \frac{\|A\mathbf{x}_k - \underline{b}\|_2^2}{(\text{traccia}(I_m - AA_k))^2}$$

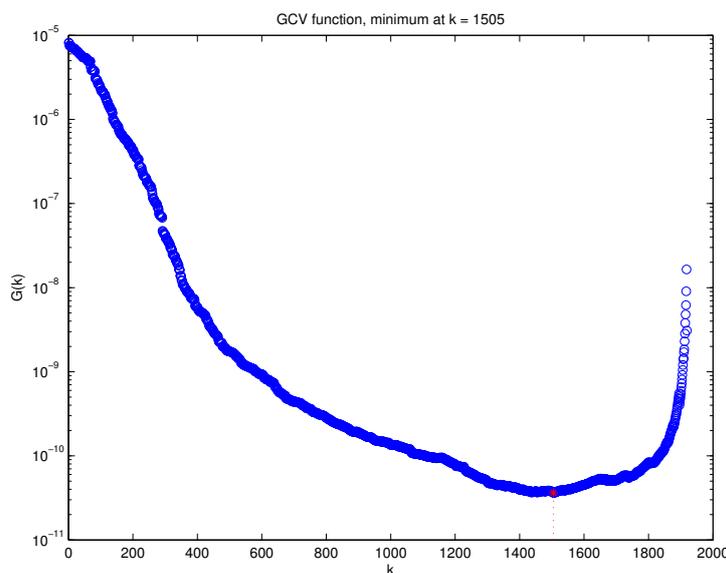


Figura 4.5: Minimo nella funzione  $G_k$

### 4.4.3 Curva-L

Come detto precedentemente in presenza di valori singolari piccoli la norma della soluzione  $\|\mathbf{x}\|$  aumenta e si allontana da quella esatta pur diminuendo  $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$  detto *residuo*.

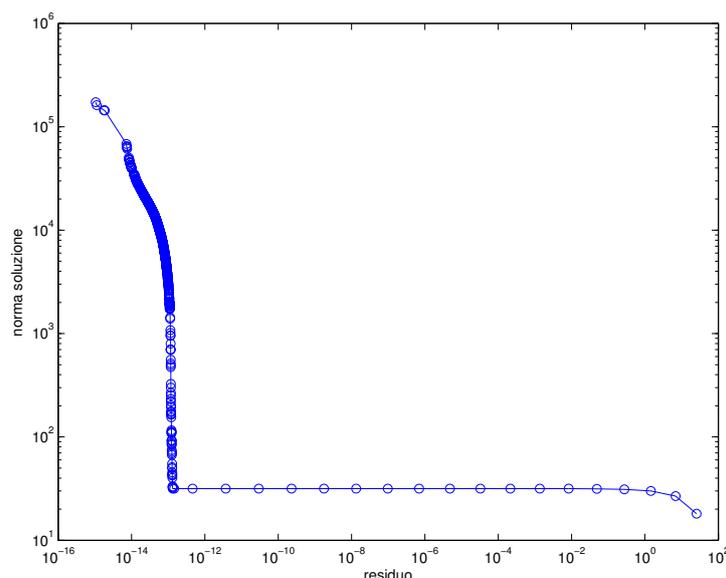


Figura 4.6: Curva-L.

Mettendo in relazione la norma della soluzione e il residuo al variare del parametro di regolarizzazione con un grafico in scala logaritmica otteniamo la cosiddetta *curva-L* tramite la quale possiamo trovare il parametro di regolarizzazione scegliendo il valore per cui ci troviamo in prossimità dell'angolo; per questo valore la soluzione regolarizzata è un compromesso tra una soluzione con norma piccola e residuo basso.

La Figura 4.7 si riferisce alla stessa simulazione della Figura 4.3. A seconda del parametro scelto la soluzione è più o meno precisa; in Matlab è possibile scegliere il parametro di regolarizzazione tramite la curva-L con due metodi che lavorano in modo diverso e potrebbero quindi restituire valori di  $k$  diversi.

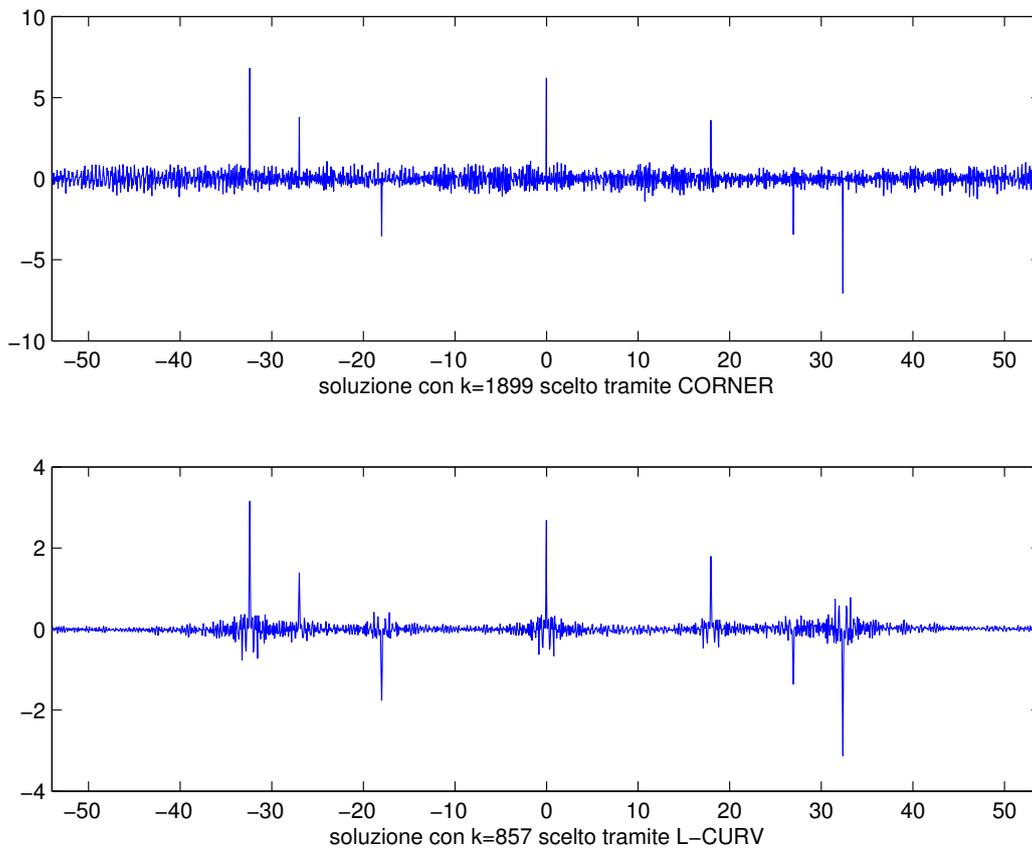


Figura 4.7: Soluzione esatta e calcolata tramite TSVD, con due diversi parametri di regolarizzazione

# Capitolo 5

## Elaborazione di dati sperimentali

Consideriamo il caso pratico dell'analisi del suolo attraverso una misurazione effettuata all'aeroporto per cui devo ringraziare il Prof. Gian Piero Deidda per avermi gentilmente permesso di utilizzare i dati.

L'analisi è stata effettuata su un tratto della lunghezza di 240m con uno strumento composto da 6 antenne parallele distanziate di pochi centimetri trainato da un'automobile a velocità costante e bassa in modo da ottenere tracce ravvicinate. Una traccia contiene i dati ricevuti durante la finestra di misurazione, cioè dall'invio del segnale alla ricezione della risposta del suolo. Per ogni antenna lungo la linea sono state registrate 2564 tracce, distanziate circa 9cm l'una dall'altra, ognuna delle quali tramite 326 campioni.

Nel caso specifico della misura effettuata non conosciamo né la forma della wavelet né la durata della finestra di misurazione, dati che sono solitamente conosciuti, ma solo la frequenza dell'antenna ossia 200MHz.

La durata della finestra di misurazione è un dato fondamentale in quanto, come detto precedentemente, il rapporto tra questa e la durata della wavelet influenza il condizionamento della matrice  $\mathbf{W}$  e di conseguenza la soluzione della deconvoluzione. Procediamo a tentativi e per esempio otteniamo che per un rapporto tra finestra di misurazione e wavelet di 96 il risultato della deconvoluzione è molto simile ai dati grezzi, vedi Figura 5.1. Utilizziamo come periodo della wavelet  $T=5[\text{ns}]$  e come finestra di misurazione  $A=5*96=480[\text{ns}]$ , con questi dati creiamo la matrice  $\mathbf{W}$ .

I dati misurati si presentano come una matrice di 2564 colonne e 326 righe; per cui le considerazioni fatte nei capitoli precedenti su una colonna di termini noti devono essere estese a una matrice in cui ogni colonna rappresenta

un termine noto, equivalente a risolvere 2564 sistemi lineari

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{R} \quad \mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{G}, \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (5.1)$$

dove  $n = 326$  e  $m = 2564$ .

Se dovessimo risolvere singolarmente ogni sistema lineare

$$\mathbf{W}\mathbf{g}_i = \mathbf{r}_i \quad i = 1, \dots, m$$

la complessità sarebbe  $O(m \cdot \frac{n^3}{3})$  dove  $m$  è il numero di colonne, cioè quante volte risolviamo il sistema, ed  $n$  è il numero di righe; per cui è più conveniente fattorizzare una sola volta la matrice  $\mathbf{W}$  tramite la fattorizzazione  $PA=LU$  e risolvere singolarmente le coppie di sistemi triangolari

$$\begin{cases} L\mathbf{y}_i = \mathbf{r}_i \\ U\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i \end{cases}$$

riducendo la complessità a  $O(\frac{n^3}{3} + m \cdot n^2)$  che è prossima a  $O(n^3)$  quando  $m \simeq n$ .

In Figura 5.1 è riportato il radargramma dei dati sperimentali e dei dati risultanti dopo la deconvoluzione.

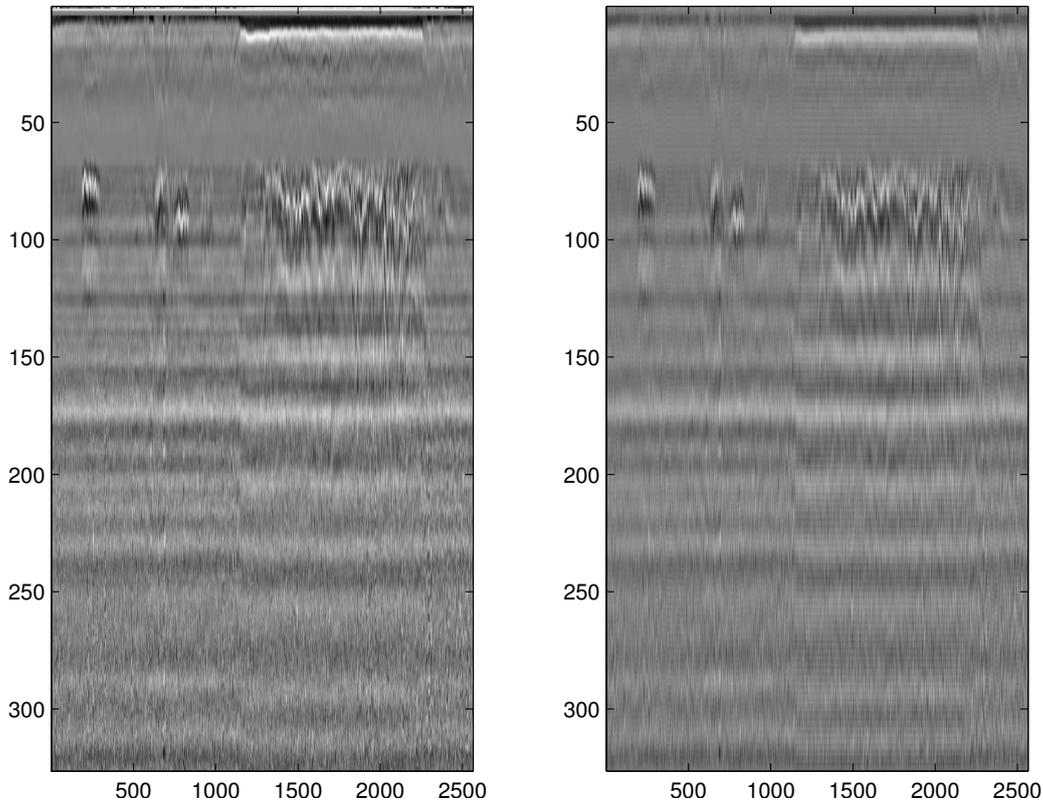


Figura 5.1: A sinistra i dati grezzi, a destra i dati dopo la deconvoluzione con rapporto tra finestra e wavelet pari a 96.

La scelta di 96 come rapporto tra finestra e wavelet è il risultato di tentativi per trovare una risoluzione che si avvicinasse a quella dei dati grezzi, nella realtà il rapporto sarebbe potuto essere diverso e di conseguenza sarebbe necessario regolarizzare il problema.

In Figura 5.2 vediamo i dati grezzi e i dati dopo la deconvoluzione ipotizzando un rapporto tra finestra e wavelet di 150, per cui  $A=5 \cdot 150=750$ [ns].

In questo caso il condizionamento della matrice è  $3.92 \cdot 10^2$  che di per sé non è un valore alto ma nel caso di dati sperimentali dove l'errore sulla misura può essere dell'ordine di  $10^{-1}$ , come visto nella Definizione 4.2 è sufficiente per amplificare l'errore sulla soluzione; infatti non è possibile vedere tra la tracce 1250 e 2250 quello che dovrebbe essere un tombino di metallo e prima della traccia 1000 le due tubature visibili in Figura 5.1. In questo caso è necessario applicare una regolarizzazione per poter ottenere una soluzione corretta.

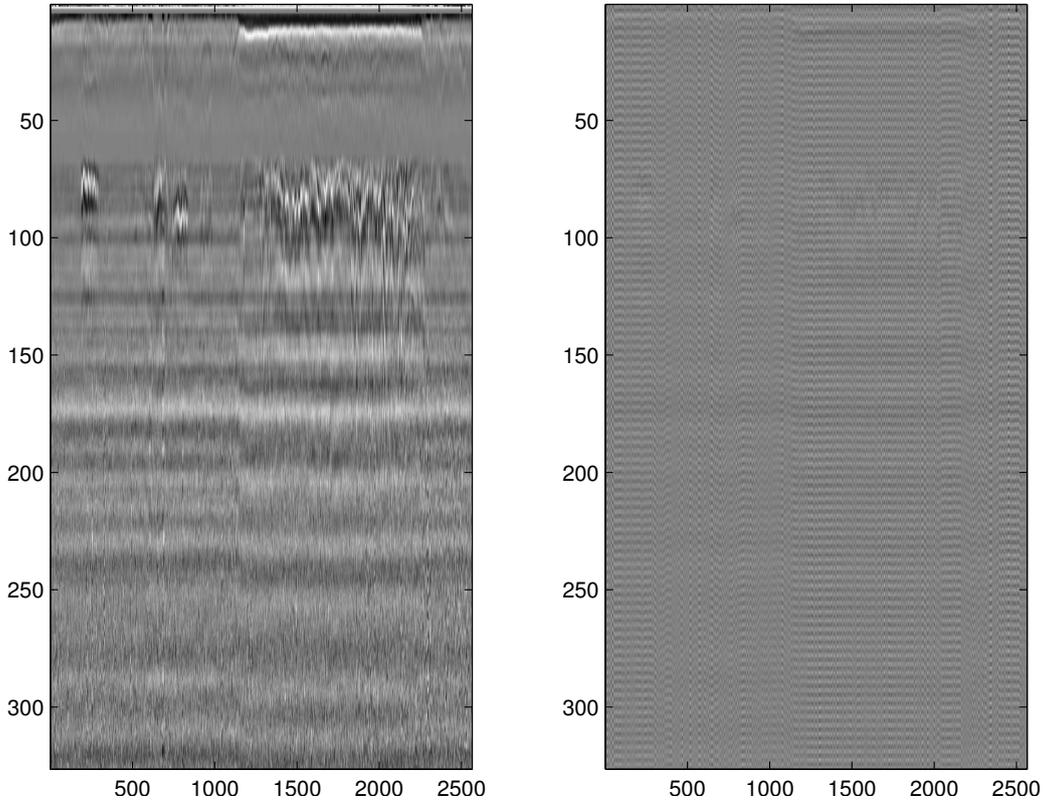


Figura 5.2: Dati grezzi e dati dopo la deconvoluzione quando il rapporto tra finestra e wavelet è 150.

Nel caso specifico applichiamo la regolarizzazione tramite il metodo TSVD; il parametro di regolarizzazione  $k=322$  è scelto uguale per tutte le colonne, ma è possibile che esista un valore ottimale del parametro  $k$  diverso per ogni colonna di termini noti. La soluzione è ottenuta eseguendo il prodotto tra matrici:

$$\mathbf{G} = \mathbf{V}_k \boldsymbol{\Sigma}_k^\dagger \mathbf{U}_k^T \mathbf{R} \quad (5.2)$$

dove  $\mathbf{V}_k$ ,  $\mathbf{U}_k^T$  sono le matrici contenenti i vettori singolari e  $\boldsymbol{\Sigma}_k^\dagger$  è la pseudo-inversa della matrice diagonale contenente i valori singolari troncate secondo il parametro  $k$ . Dopo la deconvoluzione regolarizzata in Figura 5.3 è possibile vedere l'oggetto quadrato che dovrebbe essere un tombino e prima della traccia 1000 si possono vedere due oggetti coerenti con le due tubature.

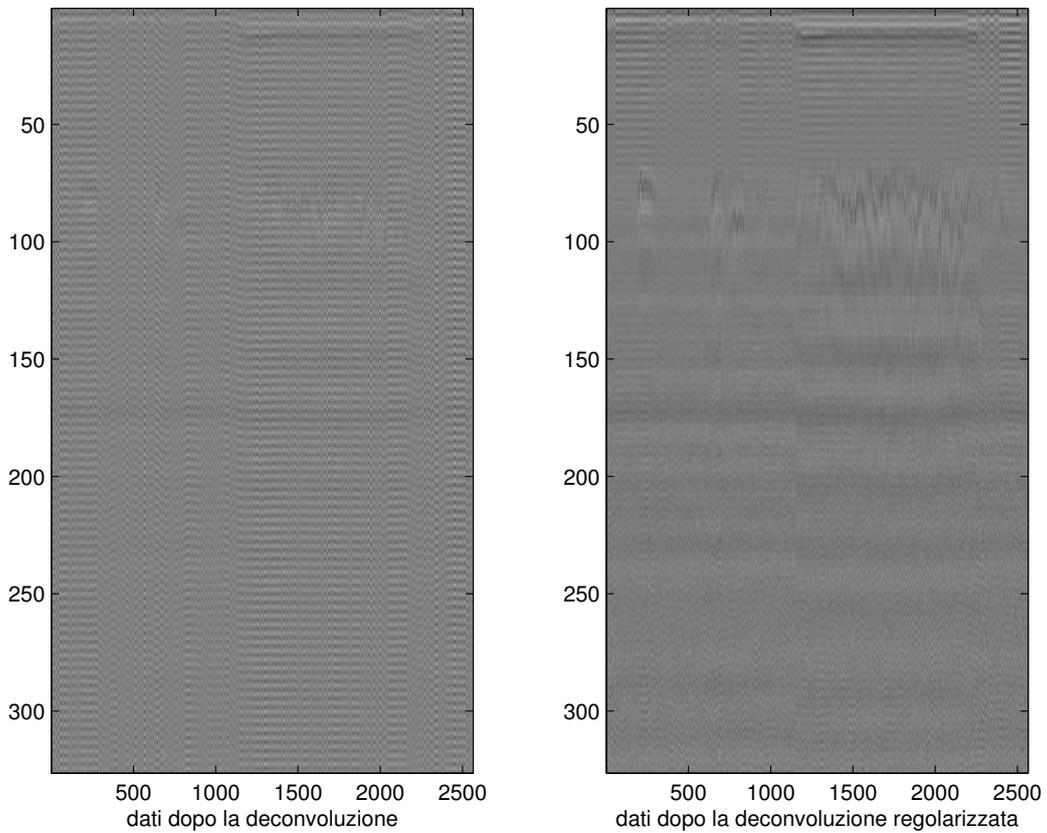


Figura 5.3: A sinistra i dati dopo la deconvoluzione, a destra i dopo la deconvoluzione regolarizzata con parametro di regolarizzazione  $k=322$ .

La risoluzione della deconvoluzione nel dominio del tempo permette di ottenere risultati più precisi, infatti risolvendo la deconvoluzione in frequenza tramite i due metodi esposti precedentemente con il rapporto tra finestra e wavelet di 150 i dati ottenuti risultano con una pessima precisione.

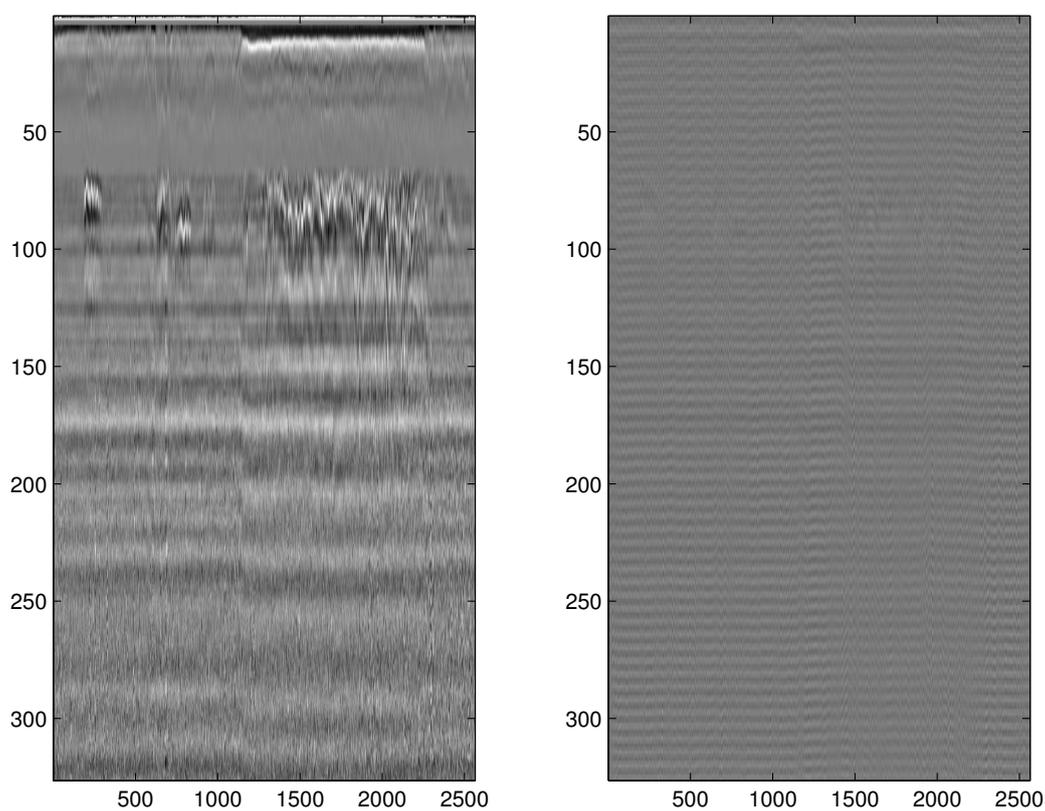


Figura 5.4: Dati grezzi e dati dopo la deconvoluzione in frequenza tramite interpolazione.

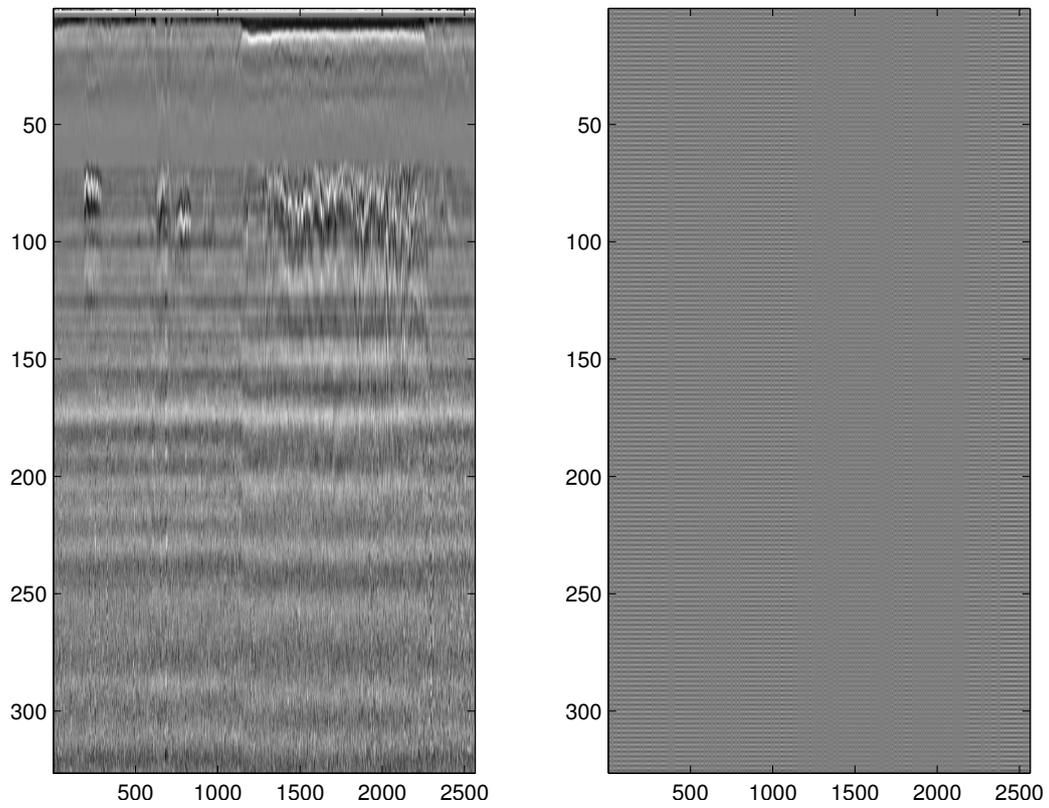


Figura 5.5: Dati grezzi e dati dopo la deconvoluzione in frequenza tramite whitening.

L'asse delle ordinate dei radargrammi è espresso in relazione al tempo, per essere espresso in funzione della profondità è necessario conoscere la velocità di propagazione nel mezzo, ottenibile tramite i metodi spiegati nel capitolo sui GPR.

L'utilizzo di più antenne parallele permette di realizzare un'analisi del suolo in 3D poiché tiene conto della profondità, della linea lungo la quale viene effettuata la misura e della linea lungo la quale sono posizionate le antenne, per cui per ogni traccia avrò i dati ricevuti da tutte le antenne.

Il passo successivo alla deconvoluzione è la *migrazione*, che equivale ad una deconvoluzione nello spazio e permettere di ottenere immagini più coerenti, infatti dopo la migrazione un oggetto non viene più visualizzato come una iperbole con vertice in corrispondenza della posizione dell'oggetto ma è possibile vedere direttamente la forma dell'oggetto dove naturalmente la risoluzione dipende dalla scelta dello strumento.

# Capitolo 6

## Conclusione

Nei capitoli precedenti ho esposto quanto sia problematico ricavare i dati del suolo da una misura sperimentale sia affrontando la deconvoluzione nel dominio della frequenza che del tempo, proponendo diversi metodi per ottenere risultati migliori.

Nel capitolo riguardante l'elaborazione di dati sperimentale ho dimostrato che la regolarizzazione della deconvoluzione non è solo consigliata per migliorare i risultati ma ,come nel caso esaminato dove la finestra di misurazione era di 750[ns], è necessaria per ottenere dati utilizzabili; infatti come si nota in Figura 5.3 solo regolarizzando la deconvoluzione è possibile ottenere informazioni sul terreno che verrebbero altrimenti perse a causa degli errori amplificati dal cattivo condizionamento della matrice.

In particolare il metodo proposto per regolarizzare e risolvere l'equazione integrale della deconvoluzione tramite la discretizzazione e la TSVD permette di lavorare usando una sola decomposizione ai valori singolari e risolvendo il sistema (5.1) tramite l'equazione (5.2) dove non è necessario calcolare matrici inverse in quanto  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  sono ortonormali e  $\Sigma$  è diagonale, producendo vantaggi sia in ambito di precisione della soluzione che in tempi di elaborazione. Uno sviluppo futuro potrebbe comportare lo studio di eventuali benefici utilizzando un parametro di regolarizzazione specifico per ogni colonna di termini noti e l'utilizzo di algoritmi iterativi approfittando del fatto che le caratteristiche del suolo variano lentamente tra tracce adiacenti potendo così applicare il metodo iterativo a partire dalla soluzione trovata per la traccia precedente riducendo così il numero di passi e velocizzando l'elaborazione.

# Bibliografia

- [1] Butler, Dwain K *Near-surface geophysics* 2005.
- [2] Allen, C and Wohletz, B and Gogineni, S, *Radar sounding of glaciers in Greenland* 1996.
- [3] Savelyev, Timofey and Yarovoy, Alexander *3D imaging by fast deconvolution algorithm in short-range UWB radar for concealed weapon detection* 2013.
- [4] Rothwell, Edward J and Sun, Weimin *Time domain deconvolution of transient radar data* 1990.
- [5] Schmelzbach, C and Scherbaum, F and Tronicke, J and Dietrich, P *Bayesian frequency-domain blind deconvolution of ground-penetrating radar data* 2011.
- [6] Roth, Friedrich, *Convolutional models for landmine identification with ground penetrating radar* 2005.
- [7] Rodriguez, G. *Algoritmi Numerici* 2008.
- [8] Rodriguez, G. and Seatzu, S. *Introduzione alla Matematica Applicata e Computazionale* 2010.
- [9] Aricò, A. and Rodriguez, G. *A fast solver for linear systems with displacement structure* 2010.
- [10] Redivo-Zaglia, M. and Rodriguez, G. *smt: a Matlab toolbox for structured matrices* 2012.
- [11] Hansen, P.C. *Regularization Tools: A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems* 1994.
- [12] Hansen, P.C. *The truncated SVD as a method for regularization* 1987.