



Università degli Studi di Cagliari

Facoltà di Ingegneria e Architettura

Corso di Laurea in Ingegneria Energetica

Sviluppo di un sistema di misura  
per la stima della diffusività termica dei  
materiali: risoluzione del problema inverso  
di Fourier

*Relatore:* Prof. R. Baccoli

*Tesi di Laurea di:*

Elisa Bacciu

*Correlatore:* Prof. G. Rodriguez

*Controrelatore:* Prof. G. Gatto

A.A. 2017-2018

# INDICE

INTRODUZIONE	1
<b>CAPITOLO 1</b>	<b>3</b>
<b>TRASMISSIONE DEL CALORE PER CONDUZIONE E RELATIVI CAMPI DI APPLICAZIONI</b>	<b>3</b>
1.1 TRANSITORI TERMICI NELL'EDILIZIA: TRASMITTANZA PERIODICA	4
<b>CAPITOLO 2</b>	<b>12</b>
<b>RICHIAMI DELLA CONDUZIONE DI TEORIA DELLA CONDUZIONE DEL CALORE</b>	<b>12</b>
2.1 EQUAZIONE GENERALE DELLA CONDUZIONE DEL CALORE	15
2.2 DIFFUSIVITÀ TERMICA	21
<b>CAPITOLO 3</b>	<b>25</b>
<b>MISURATORE PER LA CONDUCIBILITÀ TERMICA</b>	<b>25</b>
3.1 UNITÀ TERMICHE	27
3.1.1 Effetto e celle Peltier	27
3.1.3 Controllo	31
3.2 TERMOFLUSSIMETRI	38
3.3 SONDE TEMPERATURE	39
3.3.1 Termoresistenze	39
3.3.2 Termocoppie	40
3.3.3 Sonde nel dispositivo	41
3.4 ACQUISIZIONE ED ELABORAZIONE DATI	45
<b>CAPITOLO 4</b>	<b>48</b>
<b>MODELLIZZAZIONE</b>	<b>48</b>
4.1 MODELLIZZAZIONE MATEMATICA	49
4.1.1 Caso monodimensionale	49
4.1.2 Caso bidimensionale	51
4.2 MODELLIZZAZIONE SU MATLAB®	55
4.2.1 Programma di ottimizzazione	60
<b>CAPITOLO 5</b>	<b>62</b>
<b>PROVE SPERIMENTALI E RISULTATI</b>	<b>62</b>
5.1 PROVE SPERIMENTALI PER LA CONDUCIBILITÀ TERMICA	62
5.2 PROVE SPERIMENTALI PER LA DIFFUSIVITÀ TERMICA	73
<b>CONCLUSIONI</b>	<b>79</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>81</b>



# INTRODUZIONE

La comprensione e lo studio della trasmissione del calore per conduzione riveste un ruolo molto importante. Sia da un punto di vista scientifico che tecnico-applicativo sono infatti svariati i settori che necessitano di informazioni precise sul comportamento termico dei materiali utilizzati. Da ciò nasce il grande interesse nella ricerca di metodi di misura che forniscano dati affidabili sulle proprietà termofisiche dei materiali, preferibilmente ottenuti su piccoli esemplari ed in breve tempo.

Conducibilità e diffusività termica sono i due parametri di maggior interesse per la caratterizzazione termica di un materiale: la conoscenza di queste proprietà è infatti essenziale per la modellizzazione e la gestione del calore. In particolare la conducibilità termica permette di descrivere il comportamento in regime stazionario mentre la diffusività termica è fondamentale per la comprensione e la previsione del comportamento in regime transitorio.

In questo lavoro di tesi è stata posta particolare attenzione sulla diffusività termica, una proprietà strettamente correlata al tempo di propagazione delle variazioni di temperatura all'interno di un corpo che unisce in un unico termine due caratteristiche antagoniste di un materiale: capacità di accumulare calore e capacità di condurre il calore.

In letteratura sono presenti vari metodi di misura (metodi in regime transitorio) per la diffusività termica basati sull'equazione generale della conduzione. Tra i più diffusi si trovano: Laser Flash Analysis (LFA), Hot Wire Method (THW), Hot Disk Technique, Hot Strip Method (HSM). Sono tutti metodi in grado di produrre risultati accurati e ripetibili richiedendo tempi di misura molto brevi. I principali svantaggi degli apparati attualmente in commercio è legato al loro elevato costo, alle dimensioni e alle caratteristiche dei materiali testati.

L'obiettivo di questa tesi nasce dalla necessità di sviluppare un sistema di misura per la determinazione della conducibilità e diffusività termica dei materiali. A tal proposito è stato realizzato un sistema basato su due celle Peltier, controllate per via software su piattaforma LabVIEW, per imporre i regimi desiderati lungo l'estensione massica del provino. Inoltre i dati di temperatura e di flussi di calore sono stati utilizzati per implementare le condizioni al

contorno e le condizioni iniziali dell'equazione di Fourier in regime transitorio. La risoluzione per via numerica tramite il metodo delle differenze finite ha permesso di impostare un problema inverso per determinare il parametro di interesse che è la diffusività termica del materiale sotto test. A tal proposito si coglie l'occasione per ringraziare il gruppo di ricerca di *Matematica Informatica* coordinata dal prof. G. Rodriguez ed in particolar modo si ringrazia la Dottoressa Anna Concas, dottoranda del gruppo di ricerca. Grazie alla loro collaborazione è stato sviluppato un modello bidimensionale in grado di determinare il campo termico all'interno di un materiale omogeneo, uniforme e isotropo caratterizzato da una geometria semplice.

Sono state eseguite numerose prove su materiali quali il sughero, il fibrocemento, il polistirene estruso e il plexiglass per quanto riguarda la determinazione della conducibilità termica. Le prestazioni del sistema per quanto riguarda la determinazione della diffusività termica sono state testate su un materiale che potesse offrire i requisiti di essere omogeneo, uniforme ed isotropo al fine di soddisfare l'applicabilità di un modello bidimensionale. La nostra attenzione è ricaduta sul Plexiglass (PMMA) in quanto è un buon approssimante di tali requisiti; un ulteriore vantaggio offerto da questo materiale è l'agevole reperimento in letteratura dei valori delle sue proprietà termotecniche, utili per un confronto con i risultati sperimentali ottenuti.

L'impianto matematico per la risoluzione del problema inverso è stato sviluppato su piattaforma Matlab®. Tramite un metodo di risoluzione iterativo è stato possibile stimare il valore della diffusività termica con un significativo grado di accuratezza. Confrontando il valore ottenuto con quelli disponibili in letteratura si è osservato uno scostamento pari al 3%.

## CAPITOLO 1

# TRASMISSIONE DEL CALORE PER CONDUZIONE E RELATIVI CAMPI DI APPLICAZIONI

Al giorno d'oggi la maggior parte dei materiali viene impiegata in situazioni che sfidano i limiti delle loro capacità termiche. È quindi di fondamentale importanza comprenderne e prevederne il comportamento sotto l'influenza di carichi termici in varie condizioni. Moltissimi settori, dall'industria automobilistica a quella elettronica, dai produttori di energia al settore dell'edilizia, necessitano di informazioni precise sul comportamento termico dei materiali utilizzati.

Per questo motivo vengono utilizzate tecniche di analisi termica per analizzare la maggior parte dei materiali oggi in uso per i vari campi di applicazione come polimeri, compositi, rivestimenti, prodotti farmaceutici, film, fibre, ceramiche e metalli e anche materiali e alimenti biologici.

Conducibilità termica, *diffusività termica* e capacità termica sono tre i parametri che generalmente vengono utilizzati nella caratterizzazione dei materiali da un punto di vista termotecnico. Queste proprietà definiscono la capacità di un materiale di immagazzinare e trasferire calore; per poter modellare e gestire il calore, sia che il materiale sia richiesto per isolare, condurre o semplicemente resistere alle variazioni di temperatura è necessaria una conoscenza precisa di tali valori.

Le proprietà di trasferimento di calore riflettono inoltre informazioni importanti sulla composizione del materiale, sulla sua purezza e sulla sua struttura, così come sulle caratteristiche prestazionali secondarie come la tolleranza allo shock termico.

La conducibilità termica, normalmente indicata con la lettera  $\lambda$  o  $k$ , è una proprietà fisica che dipende natura del materiale; varia con la temperatura e la pressione ed esprime la capacità di un corpo di farsi attraversare da un flusso di calore. Generalmente viene misurata in

maniera sperimentale; il valore di questo parametro può variare di molti ordini di grandezza nei principali materiali di interesse. La capacità termica invece è una caratteristica del materiale che può essere descritta come la quantità di calore necessaria ad innalzare di 1°C la sua temperatura; essa dipende dalla natura del materiale e dalla sua massa.

Il parametro che lega le due proprietà appena descritte è la *diffusività termica*  $\alpha$ . Per predire processi di raffreddamento e riscaldamento o simulare campi di temperatura, la diffusività termica deve essere nota: essa è infatti un prerequisito nella risoluzione dell'equazione di Fourier per il trasferimento non stazionario del calore.

La *diffusività termica*  $\alpha$  è una proprietà specifica di ogni materiale che caratterizza la velocità di propagazione del flusso termico conduttivo causato dalla variazione nel tempo della temperatura. Un materiale con elevata conducibilità termica oppure con bassa capacità termica, avrà una grande diffusività termica. Un alto valore della diffusività termica indica una veloce propagazione del calore, mentre un basso valore di diffusività termica indica che il calore è prevalentemente accumulato nel materiale; ad esempio considerando il muro di un edificio si può sommariamente affermare che la parete presenta smorzamento e sfasamento dell'onda termica tanto più accentuato (elevata inerzia termica) quanto più è piccola la sua diffusività termica.

## 1.1 Transitori termici nell'edilizia: trasmittanza periodica

Come già accennato, il settore dell'edilizia è attualmente uno dei più coinvolti nello studio del trasferimento di calore nei materiali.

Infatti, per fronteggiare le problematiche ambientali causate dall'aumento dei consumi di energia, le politiche e le strategie energetiche internazionali negli ultimi decenni si sono basate su principi di efficientamento e risparmio energetico. In particolare, nei paesi più industrializzati ci si è focalizzati sull'area con maggior potenziale d'intervento: l'edilizia. Gli edifici, soprattutto residenziali, rappresentano in Europa il 40% dei consumi totali di energia diventando una delle principali cause di emissioni inquinanti, soprattutto sotto forma di CO<sub>2</sub>. In Europa, considerato il grande patrimonio edilizio presente, la riduzione dei consumi di energia negli edifici si traduce prevalentemente nella riqualificazione energetica di strutture già esistenti. In particolare uno dei fattori che più incide sul fabbisogno energetico di un

edificio sono gli scambi termici attraverso l'involucro.

Generalmente, durante il periodo di riscaldamento, il comportamento di una muratura può essere valutato considerando un regime stazionario, durante il quale quindi flussi di calore e temperature sono indipendenti dal tempo; partendo dalle caratteristiche fisiche del materiale (conducibilità termica) si calcola, in funzione degli spessori utilizzati, il parametro (trasmissione termica unitaria  $U \left[ \frac{W}{m^2K} \right]$ ) di confronto con i limiti imposti dalla legislazione. Nel periodo estivo, a causa della maggiore variabilità della temperatura ambientale durante il giorno, è necessario valutare le prestazioni dell'involucro edilizio in regime dinamico. Le temperature, variabili nel corso del tempo, influenzano il comportamento termico dinamico della struttura sollecitando la sua "inerzia termica", cioè la capacità di una struttura di opporsi al passaggio del flusso di calore e di assorbirne una quota, senza rilasciarlo in maniera immediata e contribuendo al contenimento delle oscillazioni della temperatura interna. L'inerzia termica è l'effetto combinato dell'accumulo e della resistenza termica della struttura ed è espressa in termini di capacità volumetrica  $\left[ \frac{kJ}{m^3K} \right]$ . L'attenuazione e lo sfasamento dell'onda termica generato da una parete dipendono dallo spessore e dalla diffusività termica  $\alpha = \frac{\rho c}{\lambda} \left[ \frac{m^2}{s} \right]$  dei materiali che la compongono.

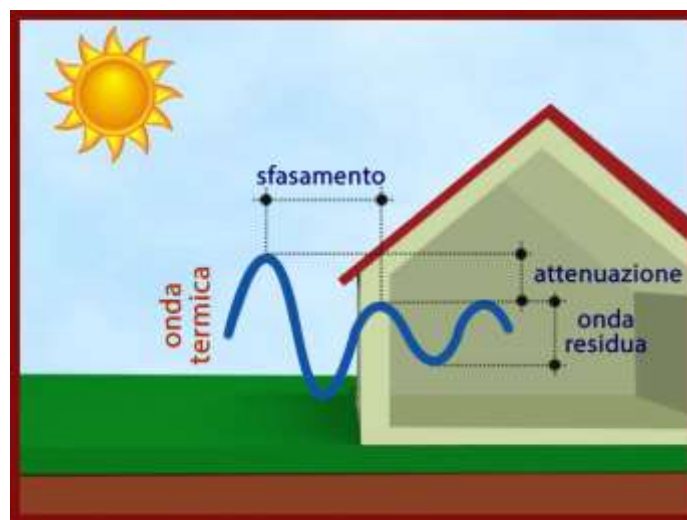


Figura 1.1 – Onda termica attraverso una parete: sfasamento e

Durante il periodo estivo la buona inerzia termica di una parete gioca un ruolo di fondamentale importanza per il comfort degli ambienti interni: il calore assorbito dalle murature durante le ore più calde della giornata viene diffuso nell'ambiente interno solo



con intensità ridotta (attenuazione) e dopo un certo numero di ore (sfasamento).

Ne consegue quindi che la temperatura degli ambienti interni resta il più possibile costante su livelli di comfort, anche quando sono sensibili le variazioni di temperatura esterna come accade nel periodo estivo. Tutto questo si traduce in un notevole risparmio energetico legato al ridotto utilizzo dell'impianto di climatizzazione.

Al fine di limitare i fabbisogni energetici legati alla climatizzazione estiva e contenere la temperatura interna degli ambienti, il D.Lgs. 192/2005 (prima dell'entrata in vigore del D.P.R. 59/2009) prevedeva una verifica riguarda la massa superficiale dell'involucro (limite inferiore  $230 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ ) senza però prevedere un indice prestazionale di riferimento.

A tale scopo nel D.P.R. 59/2009 è stata introdotta la *trasmissione termica periodica*  $Y_{IE}$ , parametro che valuta la capacità di una parete opaca di sfasare ed attenuare il flusso termico che la attraversa nell'arco delle 24 h, definita e determinata secondo la norma UNI EN ISO 13786. Rispettando le stesse limitazioni del D.Lgs. 192/2005, in alternativa alla verifica della massa superficiale, secondo il DM 26/06/2015 è possibile verificare che su tutte le pareti verticali (escluse nord-ovest, nord e nord-est) sia rispettata la condizione  $Y_{IE} < 0,10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$  e sulle strutture opache orizzontali  $Y_{IE} < 0,18 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$ .

Va posta particolare attenzione alla definizione di trasmissione termica periodica: questo parametro infatti non rappresenta una singola grandezza ma dovrebbe essere invece intesa come un framework che permette di valutare il modo in cui un materiale risponde a sollecitazioni periodiche (sinusoidali) di temperatura. Per semplificare si potrebbe affermare che la trasmissione termica periodica rappresenta l'equivalente "estivo" della trasmissione termica  $U$  utilizzata d'inverno, nel senso che viene utilizzata come parametro rappresentativo del comportamento di un elemento di involucro nel periodo estivo.

Analogamente alla diffusività termica, questo parametro contiene le informazioni riguardanti la capacità del materiale di attenuare e sfasare l'onda termica che lo attraversa.

Nei casi concreti lo studio del comportamento dell'involucro edilizio in regime transitorio si presenta particolarmente difficile da condurre a causa della complessità della legge con la quale varia la temperatura esterna e della costituzione della parete, generalmente multistrato, per cui occorre utilizzare metodi di calcolo molto complessi che permettono di risolvere l'equazione di Fourier.

Per questo motivo la norma UNI EN ISO 13786:2008 *“Prestazione termica dei componenti per edilizia- Caratteristiche termiche dinamiche- Metodi di calcolo”* propone una metodologia semplificata per descrivere lo scambio termico in regime periodico stabilizzato tra l'ambiente interno ed esterno per mezzo di una formulazione matriciale, che consente il calcolo della trasmittanza termica periodica, utilizzata poi per valutare il fattore di decremento e il ritardo temporale, le ammettenze termiche periodiche e la capacità di calore areica. Questi parametri sono determinati considerando un andamento sinusoidale della temperatura dell'aria esterna con periodo pari a 24 h.

Il caso semplificato di una variazione sinusoidale delle temperatura esterna di parete (mantenendo costanti le condizioni sulla parete interne) prende il nome di regime periodico stabilizzato; tale approccio è il caso particolare di una metodologia più generale nota come dei “Metodi Armonici” o “Analisi in frequenza” particolarmente adatta a studiare “segnali periodici”. Essi permettono infatti di scomporre e, successivamente, ricombinare un segnale generico in una somma (infinita) di sinusoidi.

Si osservi che la temperatura esterna, varia quotidianamente tra un minimo (solitamente raggiunto prima dell'alba) ed un massimo (raggiunto dopo il mezzogiorno), secondo una legge non sinusoidale per effetto delle variazioni climatiche giornaliere (nubi, vento, pioggia, ...); considerando però la periodicità della variazione della temperatura nelle 24 ore, il suo andamento può essere descritto con un'espansione in serie di Fourier.

Risolvere il problema del transitorio stabilizzato per un'onda sinusoidale permette di risolvere anche qualunque altro regime periodico rappresentabile come somma di onde sinusoidali.

Risolvendo l'equazione di Fourier per un flusso monodimensionale in un materiale isotropo e omogeneo con diffusività termica  $\alpha$  e temperatura superficiale variabile con legge sinusoidale  $T_{x=0} = A \sin(\omega t)$  con

- frequenza angolare  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  e
- periodo  $P=24$  h

si ottiene un andamento della temperatura all'interno del materiale che segue una

legge esponenziale  $T_x = A e^{-\sqrt{\frac{\pi \rho c}{\lambda T}} x} (\omega t - \sqrt{\frac{\pi \rho c}{\lambda T}} x)$ .

Se da una parte la conducibilità termica dei materiali fa sì che un'oscillazione della temperatura sulla superficie si propaghi al loro interno, dall'altra, a causa delle capacità di stoccare calore nei suoi strati, l'ampiezza delle oscillazioni diminuisce in maniera esponenziale al penetrare nel materiale come evidenziato dalla formula. La penetrazione delle escursioni termiche in un materiale (oscillazioni) dipende quindi dal periodo delle stesse: oscillazioni veloci (che si svolgono su brevi tempi) penetrano di meno di quelle lente. Poiché, man mano che si penetra nella parete, le oscillazioni più rapide vanno estinguendosi, una volta raggiunta una certa profondità, l'onda di temperatura sarà praticamente sinusoidale, cioè ridotta alla fondamentale di periodo 24 h.

La norma UNI EN ISO 13786, ipotizza una variazione sinusoidale con periodo pari a 24 h della temperatura ambientale (descrivibile come somma di un valor medio e di una oscillazione di ampiezza nota e valor medio nullo) e permette di definire i seguenti parametri:

- Trasmittanza termica periodica  $Y_{IE} \left( \frac{W}{m^2K} \right)$  che rappresenta il rapporto tra l'ampiezza della flusso termico trasmesso attraverso il componente opaco e l'ampiezza della forzante termica esterna (temperatura ambientale), assumendo costante la temperatura interna.
- Fattore di attenuazione  $F_a$ : è il rapporto tra la trasmittanza termica periodica e la trasmittanza termica stazionaria; è sempre inferiore all'unità, e rappresenta il rapporto fra le ampiezze di due flussi termici, rispettivamente riferiti al caso reale e al caso in cui la parete sia sprovvista di capacità inerziale;
- Sfasamento  $\varphi$  (h): lo sfasamento temporale, misurato in ore, tra il picco della forzante esterna e il picco del flusso termico da essa indotto, che si manifesta sempre in ritardo rispetto al primo.

Il metodo indicato dalla norma si basa sulla risoluzione analitica dell'equazione del calore con condizioni al contorno periodiche, di periodo P.

P è il periodo dell'oscillazione, nella letteratura tecnica e nella normativa gli indici prestazionali del comportamento termico dinamico di una parete vengono generalmente riferiti a  $P = 24h$ , che corrisponde a variazioni meteorologiche e di temperatura giornaliere. Più in generale i periodi P di interesse pratico sono:  $P = 1h$  che corrisponde a variazioni temporali molto piccole, come quelle relative a sistemi di controllo della temperatura; una

settimana corrispondente a medie a termine più lungo dell'edificio; un anno, utile per il trattamento dello scambio termico attraverso il terreno.

Supponendo quindi di avere condizioni di periodo  $P$  sui due lati e sviluppando in serie di Fourier la funzione temperatura, si ricava per ogni strato una matrice di trasferimento:

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{1,11} & Z_{1,12} \\ Z_{1,21} & Z_{1,22} \end{pmatrix}$$

Il primo pedice fa riferimento allo strato di materiale mentre i pedici  $1$  e  $2$  indicano i due lati del singolo strato.

Questa matrice permette di calcolare temperatura e flusso su un lato, conoscendo temperatura e flusso sull'altro lato:

$$\begin{pmatrix} \hat{\theta}_2 \\ \hat{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{1,11} & Z_{1,12} \\ Z_{1,21} & Z_{1,22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{q}_1 \end{pmatrix}$$

Si definisce profondità di penetrazione periodica  $\delta$  la profondità alla quale l'ampiezza delle variazioni di temperatura viene ridotta di un fattore  $e$  (base dei logaritmi naturali  $e \approx 2,718$ ) in un materiale omogeneo di spessore infinito soggetto a variazioni sinusoidali di temperatura sulla sua superficie:

$$\delta = \sqrt{\frac{\lambda P}{\pi \rho c}} = \sqrt{\frac{\alpha P}{\pi}}$$

Se lo strato ha spessore  $d$  si denota con  $\xi$  il rapporto tra lo spessore e la profondità di penetrazione periodica:  $\xi = \frac{d}{\delta}$ .

Le componenti della matrice  $Z$  sono definite da funzioni dipendenti dalle tre proprietà termofisiche del materiale ( $\lambda, \rho, c$ ) e dal suo spessore  $d$ :

- $Z_{1,11} = Z_{1,22} = \cosh(\xi) \cos(\xi) + j \sinh(\xi) \sin(\xi)$
- $Z_{1,12} = -\frac{\delta}{2\lambda} \{ \sinh(\xi) \cos(\xi) + \cosh(\xi) \sin(\xi) + j [ \cosh(\xi) \sin(\xi) - \sinh(\xi) \cos(\xi) ] \}$
- $Z_{1,21} = -\frac{\lambda}{\delta} \{ \sinh(\xi) \cos(\xi) - \cosh(\xi) \sin(\xi) + j [ \sinh(\xi) \cos(\xi) + \cosh(\xi) \sin(\xi) ] \}$

La matrice di trasferimento di strutture composte da  $N$  strati omogenei viene calcolata come prodotto delle matrici dei singoli strati

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = Z_i Z_1 Z_2 \dots Z_{N-1} Z_N Z_e$$

Dove  $Z_1 Z_2 \dots Z_{N-1} Z_N$  sono le matrici di trasferimento degli N strati iniziando dal più interno, e  $Z_i$  e  $Z_e$  sono le matrici degli strati liminari interno ed esterno. Indicando con pedice e i valori esterni e pedice i quelli interni e supponendo che la parete sia sottoposta ad un sollecitazione esterna, i valori interni si ricavano dagli esterni come segue:

$$\begin{pmatrix} \hat{\theta}_i \\ \hat{q}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\theta}_e \\ \hat{q}_e \end{pmatrix}$$

Ricavando dall'equazione qui sopra i flussi in funzione delle temperature si ottiene:

$$\begin{pmatrix} \hat{q}_e \\ \hat{q}_i \end{pmatrix} = \frac{1}{Z_{12}} \begin{pmatrix} Z_{11} & -1 \\ -1 & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\theta}_e \\ \hat{\theta}_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\theta}_e \\ \hat{\theta}_i \end{pmatrix} = [Y] \begin{pmatrix} \hat{\theta}_e \\ \hat{\theta}_i \end{pmatrix}$$

La matrice Y è detta delle matrici delle ammettenze. Nel caso di un locale servito da un impianto di climatizzazione si può considerare costante la temperatura interna  $\hat{\theta}_i = 0$ . In queste condizioni si ha  $\hat{q}_i = \hat{\theta}_e Y_{12}$  che rappresenta anche la potenza termica, per unità di superficie della parete esterna, che l'impianto di climatizzazione deve fornire per mantenere costante la temperatura dell'ambiente interno.

Dalla definizione di trasmittanza termica periodica si ottiene  $Y_{ie} = |Y_{12}| = \frac{1}{|Z_{12}|}$ . Il termine  $Y_{12}$ , essendo un numero complesso, contiene una duplice informazione: il modulo rappresenta la variazione dell'ampiezza dell'effetto rispetto a quella della sollecitazione, mentre l'argomento ne indica il ritardo, quindi da  $Y_{12}$  si ricavano attenuazione  $F_a$  e sfasamento  $\varphi$  come:

$$\bullet F_a = \frac{Y_{ie}}{U_0} = \frac{|Y_{12}|}{U_0}$$

$$\bullet \varphi = \frac{p}{2\pi} \arg(Y_{12}).$$

Con  $U_0$  che rappresenta la trasmittanza termica stazionaria, valutata secondo la ISO 6946 senza tener conto dei ponti termici.

Conoscere la trasmittanza termica periodica di un elemento edilizio permette dunque di prevedere come questo si comporterà in presenza di una variazione della temperatura ambientale, sotto determinate condizioni al contorno; analogamente conoscere la diffusività termica di un materiale equivale a capire in che modo il calore si propaga all'interno di questo quando le condizioni di temperatura variano.

Conoscendo la diffusività termica del materiale è possibile condurre un'analisi più realistica di quello che è il comportamento di un componente edilizio. Il calcolo della trasmittanza termica periodica fornito dalla normativa prevede delle approssimazioni e delle ipotesi semplificative che talvolta possono condurre ad errori nell'analisi energetica di un edificio, non permettendo di studiare il fenomeno nelle reali condizioni di esercizio.

## CAPITOLO 2

# RICHIAMI DELLA CONDUZIONE DI TEORIA DELLA CONDUZIONE DEL CALORE

L'esperienza mostra che quando due corpi a temperatura diversa vengono posti a contatto, interagiscono fino a raggiungere la medesima temperatura, ossia si portano in una condizione di equilibrio termico come mostrato in figura 2.1. Ciò che avviene è un passaggio di energia tra i due corpi che prende il nome di *calore*.



Figura 2.1

Il calore fluisce tra i due corpi in accordo con i principi della termodinamica:

- **I PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA** → conservazione dell'energia in un sistema termodinamico isolato;
- **II PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA** → il calore fluisce spontaneamente dal corpo più caldo a quello più freddo.

Da un punto di vista macroscopico, la conduzione termica si manifesta dunque come scambio di calore all'interno di corpi solidi, liquidi o gassosi senza un apparente movimento di materia; a livello microscopico ciò che avviene è una cessione di energia cinetica da parte di molecole in una zona a più alta temperatura (maggiore energia cinetica) verso altre molecole in una zona adiacente a più bassa temperatura (minore energia cinetica). Nel caso dei solidi la conduzione è legata alla vibrazione delle molecole all'interno del reticolo e al trasporto di energia da parte degli elettroni liberi, nel caso dei liquidi e dei gas è dovuta agli urti elastici tra le molecole nel loro movimento casuale.

Prima di proseguire nel richiamo della teoria della conduzione del calore è bene tenere a mente le seguenti definizioni:

- Un corpo si definisce *omogeneo e isotropo* quando le proprietà prese in considerazione sono indipendenti dalla direzione in cui le si analizza.
- Si ha un *regime stazionario e permanente* quando il calore fluisce con continuità, senza accumularsi, e in qualsiasi punto del sistema l'energia entrante è uguale a quella uscente. Gli si contrappone il *regime non stazionario* che può essere transitorio (in cui il flusso varia continuamente) o periodico (in cui il flusso varia tra un massimo e un minimo).
- *Flusso monodimensionale* quando il gradiente di temperatura si sviluppa in un'unica direzione.

Il primo a studiare la trasmissione di calore per conduzione fu Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830). Si consideri un sistema molto semplice, costituito da una barretta cilindrica di materiale omogeneo (struttura del materiale uniforme in ogni punto) ed isotropo (proprietà termofisiche indipendenti dalla direzione) come mostrato nella figura 2.2.

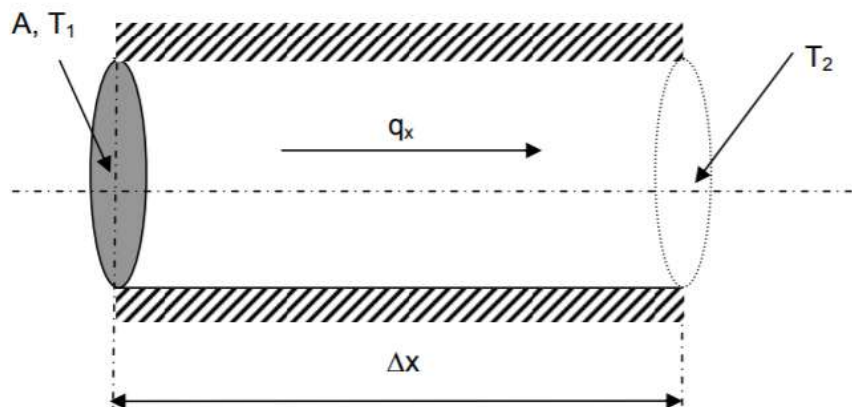


Figura 2.2

Le estremità della barretta siano costituite da due superfici piane parallele a distanza  $\Delta x$ , mantenute a temperature diverse ed uniformi  $T_1$  e  $T_2$ , con:

$$T_1 > T_2 \text{ e } T_1 - T_2 = \Delta T$$

Si consideri il corpo ben isolato lungo tutto l'involuppo in modo che il flusso avvenga solo nella direzione del suo asse: flusso monodimensionale. La differenza di temperatura causa un flusso di potenza termica  $q_x$  attraverso la sezione  $A$ ;

Si riscontra che:

$$q_x \propto A \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x}$$



Si osserva quindi una proporzionalità diretta tra flusso termico, differenza di temperatura ed area della sezione  $A$ , ed una proporzionalità inversa tra flusso termico e lunghezza della barra. Il fattore di proporzionalità è detto *coefficiente di conduzione termica* o *conduttività termica del materiale*  $\lambda$ . Tale coefficiente è una proprietà fisica del materiale e ne caratterizza il comportamento, si misura in  $\frac{W}{m \cdot K}$

Quanto affermato dalla può allora essere riscritto come:

$$q_x = -\lambda \cdot A \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

in cui il segno meno sta ad indicare che la direzione del flusso termico, se concorde con il verso crescente dell'asse delle ascisse, deve comunque corrispondere al decrescere della temperatura. In altri termini: la trasmissione del calore avviene nel senso del gradiente negativo della temperatura, ovvero dalla zona più calda a quella più fredda, in accordo con il secondo principio della termodinamica. Questa relazione è nota come *postulato di Fourier* ed in forma differenziale può essere riscritto come:

$$q_x = -\lambda \cdot A \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta x} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$$

Nel corpo cilindrico sopra descritto si avranno delle superfici a temperatura costante che approssimativamente possono essere individuate nei piani perpendicolari all'asse del cilindro. Si osserva quindi che il flusso termico si propaga in direzione perpendicolare alle superfici isoterme. In altri termini lungo la direzione di massima variazione della temperatura, o, in termini matematici, lungo la direzione del vettore gradiente di temperatura. Tale condizione ha una validità generale: su di un corpo qualsiasi una volta individuata una superficie isoterma il flusso di calore si propagherà in ogni punto in direzione perpendicolare a tale superficie.

La conducibilità o conduttività termica indicata con  $\lambda$  è il rapporto, in condizioni stazionarie, fra il flusso di calore e il gradiente di temperatura che provoca il passaggio del calore. In altri termini è una misura dell'attitudine di una sostanza a trasmettere il calore; il suo valore non dipende dalla geometria ma dalla natura del materiale e quindi dalla struttura atomica del materiale. In termini generali si può affermare che il suo valore diminuisce passando dai

solidi conduttori, alle leghe, ai liquidi e ai gas (è bene ricordare che i fluidi devono essere macroscopicamente fermi, altrimenti si innescano i meccanismi propri della convezione).

## 2.1 Equazione generale della conduzione del calore

Il postulato di Fourier, viene normalmente utilizzato nei problemi di trasmissione del calore per trovare un'espressione che descriva il campo termico in un corpo. Tuttavia tale legge è sufficiente solo per determinare una soluzione in regime stazionario, ossia eliminando la dipendenza dal tempo del campo termico del corpo, evitando di ricorrere a equazioni differenziali, spesso complicate.

Se invece viene richiesta una soluzione in transitorio, ossia se si deve trovare la distribuzione delle temperature in funzione del tempo, la legge di Fourier non è più sufficiente. Come si è già sottolineato lo scambio di energia per conduzione avviene per interazione diretta tra le molecole del mezzo che, ove esista un gradiente di temperatura, secondo le ipotesi della teoria cinetica molecolare si scambiano la loro energia cinetica rotazionale e vibrazionale. In seguito a tali scambi la quota di energia posseduta da ogni volumetto elementare del corpo si modifica e, di conseguenza, si modifica anche il campo delle temperature. Il fenomeno conduttivo è pertanto descritto quando sia noto il campo di temperatura all'interno del corpo, campo che è in generale funzione delle coordinate spaziali  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e del tempo  $\tau$ . Lo studio del fenomeno richiede pertanto la precisazione della funzione scalare:

$$T = f(x, y, z, \tau)$$

Il luogo geometrico dei punti del corpo che in un certo istante del tempo  $\tau$  hanno la medesima temperatura è una superficie isoterma. Le superfici isoterme non si intersecano mai tra loro in quanto un punto, in un certo istante, può avere un solo valore di temperatura. Si osserva facilmente che in regime stazionario, cioè indipendente dal tempo, le superfici isoterme sono fisse: ciò significa che, se si immagina di poter fotografare in istanti successivi

la loro configurazione all'interno del corpo, le immagini che si otterrebbero risulterebbero identiche fra loro. In regime variabile, invece, le superfici isoterme sono mobili e deformabili: ciò significa che, se si immagina di poter fotografare in istanti successivi la loro configurazione all'interno del corpo, le immagini che si otterrebbero risulterebbero diverse istante per istante. L'intersezione di un piano con le superfici isoterme determina su quel piano delle curve o linee isoterme che, come le superfici, sono continue e non possono intersecarsi tra loro: il maggior gradiente di temperatura si incontra attraversando le linee isoterme in una direzione  $n$  normale ad esse.

Per esplicitare  $T = f(x, y, x, \tau)$  si applichi ad un elemento infinitesimo di volume  $dV$  di un generico corpo il **I PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA** ( $dE_c + dE_p + dU = dQ - dL$ ) nel quale si omettono i termini di lavoro  $dL$ , non essendoci lavoro di deformazione, e di energia cinetica  $dE_c$  e potenziale  $dE_p$ , considerando il sistema in quiete rispetto ad un riferimento inerziale.

La forma generale dell'equazione di conservazione dell'energia, limitatamente ai soli flussi termici, fornisce:

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_g - \dot{E}_{out} = \dot{E}_{st}$$

In cui:

- $\dot{E}_{in}$  = potenza termica in ingresso [W];
- $\dot{E}_{out}$  = potenza termica in uscita [W];
- $\dot{E}_g$  = potenza termica generata [W];
- $\dot{E}_{st}$  = potenza termica immagazzinata [W].

Considerando come superficie di controllo quella che delimita il volumetto  $dV = dx dy dz$ , si può procedere ad esplicitare la relazione

$$(q_x + q_y + q_z) + \dot{E}_g - (q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}) = \dot{E}_{st}$$

Dove i primi tre termini  $q_x, q_y, q_z$  rappresentano i flussi termici in entrata secondo la direzione di ciascun asse, ognuno perpendicolare ad una faccia del volumetto, ed termini  $q_{x+dx}, q_{y+dy}, q_{z+dz}$  sono relativi ai flussi termici in uscita secondo ogni direzione attraverso la faccia opposta.

Questi ultimi sono esprimibili espandendo in serie di Taylor il flusso entrante secondo una stessa direzione e limitandosi con buona approssimazione ai primi due termini:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \quad q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz$$

In pratica queste espressioni dicono che i flussi uscenti sono pari al flusso in entrata più la sua variazione lungo la direzione considerata, espressa dalla sua derivata prima.

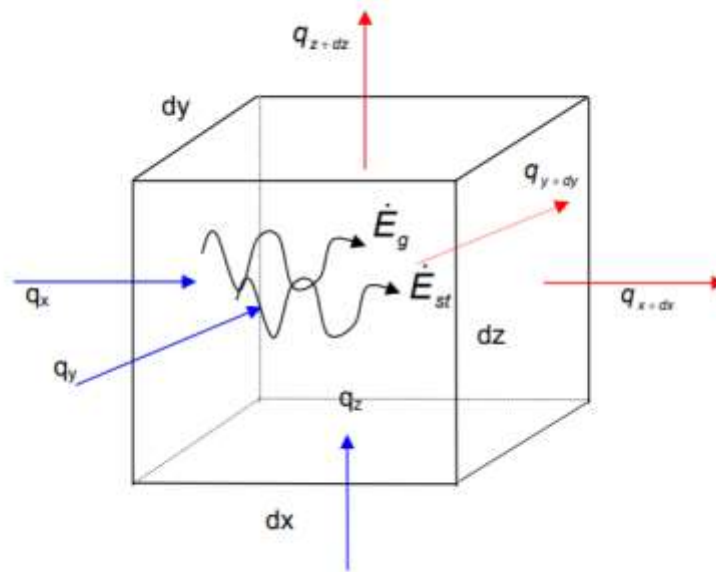


Figura 2.3

Tutti questi termini sono flussi termici puramente conduttivi e perciò devono essere valutati con la legge di Fourier, secondo la quale: Applicando nelle tre direzioni il postulato di Fourier descritto precedentemente si ottengono le seguenti equazioni:

$$q_x = -\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} dydz \quad q_y = -\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} dxdz \quad q_z = -\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} dydx$$

dove i prodotti  $dydz$ ,  $dxdz$  e  $dydx$  rappresentano le aree delle facce del volumetto attraversate dai flussi in ogni direzione. Pertanto i termini in uscita sono determinati come

$$q_{x+dx} = -\left[ \lambda_x(dydz) \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x(dydz) \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right]$$

$$q_{y+dy} = -\left[ \lambda_y(dxdz) \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y(dxdz) \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy \right]$$

$$q_{z+dz} = - \left[ \lambda_z(dydx) \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_z(dydx) \frac{\partial T}{\partial z} \right) dz \right]$$

Lungo ogni direzione il flusso netto sarà pari alla differenza tra il flusso entrante e quello uscente, dunque:

$$q_x - q_{x+dx} = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x(dydz) \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dz$$

$$q_y - q_{y+dy} = - \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy dz$$

$$q_z - q_{z+dz} = - \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dy dz$$

Per quanto riguarda la generazione interna, ipotizzando che  $q_i$  sia la generazione di potenza termica per unità di volume  $\left[ \frac{W}{m^3} \right]$  uniforme in tutto il volume infinitesimo  $dV$ , si può ricavare:

$$E_g = q_i dx dy dz$$

Mentre per la potenza termica immagazzinata si deve tener conto della massa  $\delta M$  del materiale considerato; tale massa si può esprimere come prodotto della densità  $\rho$  per il volume  $dV$ :

$$\delta M = \rho dx dy dz$$

La potenza termica immagazzinata sarà determinata dalla variazione della temperatura nel tempo  $\tau$  per il calore specifico  $c$  del materiale (se solido  $c = c_p$ ), ovvero pari alla variazione temporale dell'energia interna  $U$  della sostanza:

$$\dot{E}_{st} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} dx dy dz$$

Con le assunzioni fatte e dividendo tutto per il volumetto  $dx dy dz$  si ottiene l'equazione generale della conduzione nella forma più generale:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_i = \rho c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

Nel caso in cui il mezzo sia isotropo ( $\lambda$  costante nelle tre direzioni) è possibile riscrivere l'equazione come:

$$\lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q_i = \rho c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

Dividendo tutto per  $\lambda$  si ed introducendo al posto del termine  $\frac{\lambda}{\rho c_p}$  la diffusività termica che, nel Sistema Internazionale si misura in  $\left[ \frac{m^2}{s} \right]$  ed è indicata in letteratura con il simbolo  $\alpha$ , l'equazione assume la forma:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q_i}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

O nella forma più sintetica:

$$\nabla^2 T + \frac{q_i}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

dove  $\nabla^2 T$  è l'operatore di Laplace

Se non c'è generazione interna di calore nell'equazione generale della conduzione scompare il relativo termine e si ottiene:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

che prende il nome di **equazione di Fourier**.

Se il regime è stazionario, non c'è variazione di energia interna (temperatura costante nel tempo) l'equazione diviene:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q_i}{\lambda} = 0$$

che prende il nome di **equazione di Poisson**.

Senza generazione interna ed in regime stazionario si ottiene una forma più semplice:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad \text{o} \quad \nabla^2 T = 0$$

detta **equazione di Laplace**.

La soluzione analitica delle equazioni ottenute richiede sempre la conoscenza delle condizioni spazio-temporali ovvero condizioni al contorno (imposte sulla superficie di controllo) e, nei fenomeni non stazionari, anche condizioni temporali (il campo termico

all'istante iniziale). Stante la dipendenza del secondo ordine della temperatura con le coordinate spaziali le condizioni al contorno necessarie sono due, mentre la dipendenza del primo ordine del campo termico dal tempo richiede una sola condizione temporale.

Le condizioni al contorno possono essere di tre tipi:

- condizione di temperatura (o di Dirichlet)
- condizione di flusso (o di Neumann)
- condizione di temperatura e flusso (o di convezione)

Risolvere il problema diretto della conduzione del calore equivale a consiste nel ricavare la distribuzione spazio-temporale della temperatura in un corpo partendo da parametri termofisici del materiale, geometria, condizioni al contorno e condizioni iniziale note. L'**equazione di Fourier** governa la variazione della temperatura nel tempo in funzione del gradiente spaziale, quindi indica quanto varierà la temperatura nel tempo a causa o degli effetti generativi o degli effetti di trasporto del calore. Al contrario del *postulato di Fourier* che permette di studiare i soli fenomeni termici stazionari, essa consente dunque di studiare i transitori termici.

Essendo un'equazione differenziale alle derivate parziali è integrabile soltanto in alcuni casi particolari, ai quali si tenta di ricondurre i problemi reali. Per valutare il transitorio e risolvere dunque il problema termico diretto è necessario risolvere l'**equazione di Fourier** ed è possibile farlo seguendo tre strade differenti:

- *Metodi analitici*: soluzioni analitiche dell'equazione di Fourier sono disponibili solo per tipologie di problemi ben definiti, solitamente caratterizzati da geometrie e condizioni al contorno semplici e proprietà dei materiali uniformi ed indipendenti dalla temperatura, come ad esempio il caso di un solido semi indefinito sottoposto a sollecitazione impulsiva. Quando ciò non si verifica, si può in generale ricorrere a soluzioni di tipo numerico, che possono tuttavia comportare oneri computazionali considerevoli.

- **Metodi grafici:** esistono, per geometrie semplici, dei grafici generati in funzione di numeri adimensionali che permettono di valutare in funzione del tempo la distribuzione della temperatura e il calore scambiato.

- **Metodi numerici:** Ormai sono molto diffusi data l'aumentata potenza dei calcolatori. Hanno il grande pregio di poter trattare problemi di notevole complessità geometrica, con proprietà termofisiche variabili e condizioni al contorno arbitrarie.

I problemi termici di conduzione reale si risolvono tipicamente con l'**equazione di Fourier** attraverso l'integrazione alle differenze finite quando è presente un transitorio termico, mentre quando il problema non prevede variazioni nel tempo (ed è quindi in regime stazionario) si utilizza l'**equazione di Laplace** in termini di integrazione numerica agli elementi finiti. Nell'equazione di Laplace si può reintrodurre il termine generativo, permettendo ancora di applicare lo stesso metodo risolutivo. E' quello che si fa per risolvere i problemi di raffreddamento di circuiti elettronici, normalmente risolti in regime stazionario e agli elementi finiti.

Tuttavia è l'equazione di Fourier che dà le migliori soluzioni numeriche per lo scambio termico, dando luogo a soluzioni stabili e quindi a matrici invertibili; inoltre lo scambio termico per conduzione è un problema ben condizionato e non dà quindi luogo a problemi particolari di risoluzione.

## 2.2 Diffusività termica

Si osservi come in assenza di sorgenti e in condizioni stazionarie, il campo termico non dipende dalle proprietà termofisiche del mezzo. Nel regime variabile invece le proprietà intervengono congiuntamente attraverso la **diffusività termica** così definita:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad \left[ \frac{m^2}{s} \right]$$



Il primo a parlare di questa proprietà è stato Kelvin riferendosi ad essere con il termine di diffusività di una sostanza; successivamente Maxwell la rinominò conduttività termometrica. La diffusività termica è una proprietà di trasporto che interviene nei transitori termici. Osservando la sua espressione vengono evidenziate due attitudini del mezzo opposte: la capacità di condurre l'energia termica, espressa da  $\lambda$ , e la capacità di immagazzinare il calore, espressa da  $\rho c_p$ . Elevati valori di  $\alpha$  implicano transitori rapidi, ossia rapidità di risposta alle sollecitazioni termiche e viceversa. E' un parametro molto importante che misura l'attitudine di una sostanza a trasmettere, non il calore, bensì una variazione di temperatura. Aumentando  $\alpha$  infatti aumenta la velocità con la quale una variazione di temperatura applicata sulla superficie del sistema si propaga al suo interno.

L'equazione del calore ammette diverse soluzioni per varie condizioni al contorno, e queste soluzioni includono i valori delle proprietà termofisiche. Dunque i valori di queste proprietà possono essere determinati misurando i campi di temperatura e flusso termico e confrontandoli con le soluzioni dell'equazione del calore. Le soluzioni analitiche dell'equazione di Fourier sono limitate a semplici geometrie, ma sono molto efficienti dal punto di vista computazionale e sono di fondamentale importanza per lo studio delle proprietà di base dei problemi di conduzione del calore inverso. Purtroppo ricreare, durante gli esperimenti reali, le condizioni al contorno considerate dalle soluzioni analitiche è molto complesso.

In letteratura sono noti svariati metodi per la determinazione della diffusività termica. In linea generale si basano sulla generazione di un campo di temperatura dinamico all'interno dell'esemplare. Il processo di misura può essere descritto come segue: la temperatura del campione viene stabilizzata e successivamente si applica un piccolo disturbo termico. A partire dalla risposta di temperatura del materiale a questo piccolo disturbo, possono essere calcolati i parametri termofisici in base al modello utilizzato.

Nella pratica, il campo di temperatura dinamico è generato dal passaggio di corrente elettrica attraverso una resistenza che può avere diverse forme: sfera, filo, striscia o anche pellicola. È possibile sottoporre il materiale a perturbazioni di diverso genere; ad esempio attraverso un impulso termico (metodo transitorio a impulsi) o un flusso di calore sotto forma di una funzione a gradini (metodo transitorio graduale) o ancora un disturbo di bassa

intensità con una piccola modifica del campo di temperatura. Misurando la risposta alla perturbazione in temperatura, a seconda della geometria del campione, della fonte di calore e del modo in cui viene generato il campo di temperatura, possono essere ottenuti uno o più parametri termofisici. Attualmente i metodi più utilizzati sono: Laser Flash Analysis (LFA), Hot Wire Method (THW), la Hot Disk technique, Hot Strip Method (HSM). Sono tutti metodi che necessitano di tempi ridotti e permettono di ottenere risultati accurati e riproducibili.

In particolare la Laser Flash Analysis (LFA) è diventata la tecnica di riferimento per determinare la diffusività termica. Si basa sulla soluzione analitica dell'equazione di Fourier relativa ad una piastra infinita di spessore  $L$ , inizialmente stabilizzata ad una temperatura uniforme. Su uno dei due lati della piastra viene applicato un impulso di calore perturbando dunque il campo di temperatura. Viene misurato l'aumento della temperatura nel tempo  $\Delta T(t)$  sulla superficie posteriore del campione.

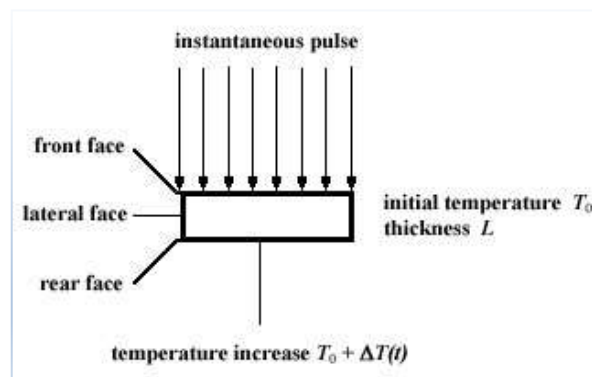


Figura 2.4 – Laser Flash Apparatus

La soluzione analitica per misure di diffusività termica con la Laser Flash Analysis è stata data da Parker assumendo le seguenti condizioni:

- 1) La durata dell'impulso laser è trascurabilmente breve rispetto al tempo caratteristico del calore diffusione.
- 2) La faccia inferiore del campione è uniformemente riscaldata da un impulso di luce.
- 3) Il campione è adiabatico durante la misurazione dopo il riscaldamento per l'impulso di luce.
- 4) Il campione è uniforme (in geometria) ed omogeneo.
- 5) Il campione è opaco (non trasparente e non traslucido) per il polso della luce e per radiazione termica.

Se queste condizioni sono soddisfatte, il flusso di calore diventa monodimensionale e la temperatura della faccia superiore del campione varia nel tempo come nel modello proposto da Carslaw e Jaeger.

I sistemi di misura per la diffusività termica dei materiali attualmente commercializzati richiedono strumentazioni molto dispendiose, generalmente il costo degli apparati in questione supera i 30mila euro.

## CAPITOLO 3

# MISURATORE PER LA CONDUCIBILITA' TERMICA

Le prove sperimentali necessarie al processo di determinazione della diffusività termica sviluppato in questa tesi sono state condotte utilizzando un dispositivo di misura della conducibilità termica a celle di Peltier. Il misuratore, rappresentato nelle foto qui di seguito, è di proprietà dell'Università degli Studi di Cagliari, ed è stato interamente progettato e realizzato nel laboratorio del dipartimento di Fisica Tecnica per opera del prof. Roberto Baccoli in collaborazione con l'ing. Puligheddu. Il primo assemblaggio risale al 2009, rispetto a quella configurazione sono state apportate alcune modifiche.

Il metodo di misura delle proprietà termiche in regime statico, ovvero della conducibilità termica, è basato sull'applicazione della legge di Fourier per la conduzione termica approssimata al caso di flusso di calore uniforme, costante e unidirezionale.

La misura ottenuta è tanto più corretta quanto più si riescono a realizzare queste condizioni al contorno motivo per cui risulta necessaria un'estrema precisione nel misurare temperature, flusso di calore e caratteristiche dimensionali dei provini. Una volta che il sistema raggiunge le condizioni di regime il valore di conducibilità termica misurato è quello corretto.

Le norme individuano due possibili procedimenti: piastra calda con anello di guardia e metodo del termoflussimetro. Questo dispositivo utilizza il metodo del termoflussimetro.

La trasmissione del calore avviene in generale lungo le tre direzioni spaziali dunque in condizioni normali è molto difficile ottenere un flusso mono dimensionale. In laboratorio è possibile approssimare la condizione unidimensionale effettuando alcuni accorgimenti quali:

- Imporre una temperatura uniforme su tutta la superficie del provino, sia sul lato caldo che su quello freddo;
- Fare in modo che le superfici a contatto con l'aria siano protette, nello specifico l'anello di guardia deve avere spessore e resistenza termica nettamente superiore al provino, in modo che il flusso di calore abbia una via preferenziale;
- Evitare quanto più possibile i flussi d'aria, quantomeno in prossimità degli elementi in prova
- Schermare i provini dall'irraggiamento dei corpi circostanti

Nella figura viene mostrata una foto del misuratore utilizzato con segnalati le principali componenti

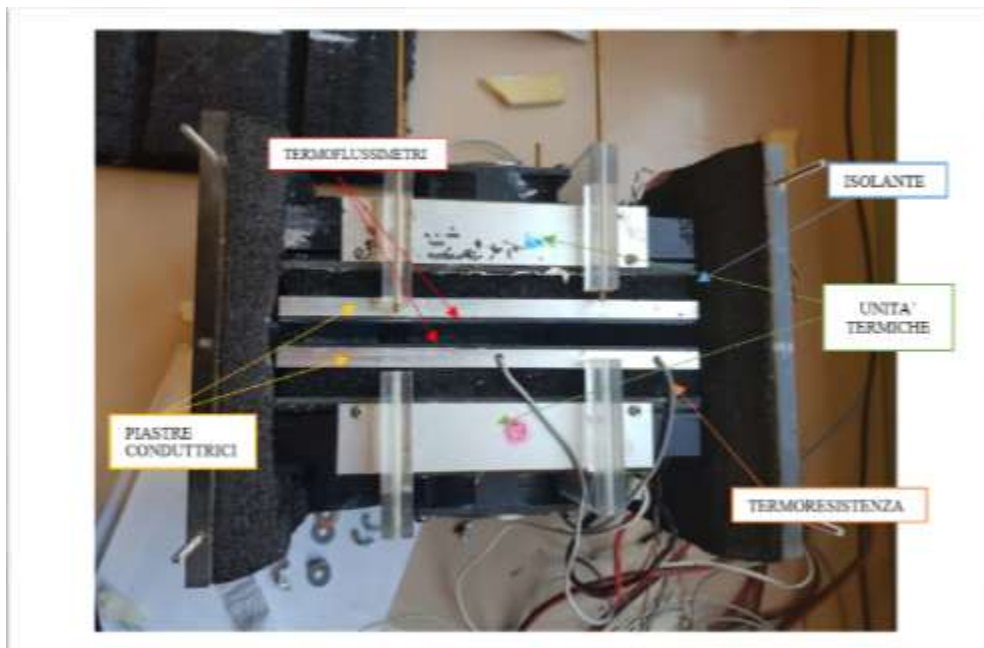


Figura 3.1 – Misuratore per la conducibilità termica dei materiali

Nel capitolo verranno descritti nel dettaglio tutti gli elementi da cui è costituito il dispositivo:

1. UNITA' TERMICHE E CONTROLLER
2. TERMOFLUSSIMETRI
3. SONDE DI TEMPERATURA
4. SISTEMA DI ACQUISIZIONE ED ELABORAZIONE DATI

## 3.1 Unità termiche

### 3.1.1 Effetto e celle Peltier

In un circuito chiuso, composto di due materiali metallici o semiconduttori e percorso da una corrente elettrica di intensità  $I$ , si manifesta assorbimento di calore in uno dei due giunti (a temperatura maggiore) e sviluppo di calore nell'altro (a temperatura minore). Si definisce il calore di Peltier  $q_p = \pi I$  ove  $\pi$  è il coefficiente di Peltier che risulta legato ai coefficienti  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  dalla relazione  $\pi = (\alpha_1 - \alpha_2)T$  ricavabile in base al primo principio della termodinamica.

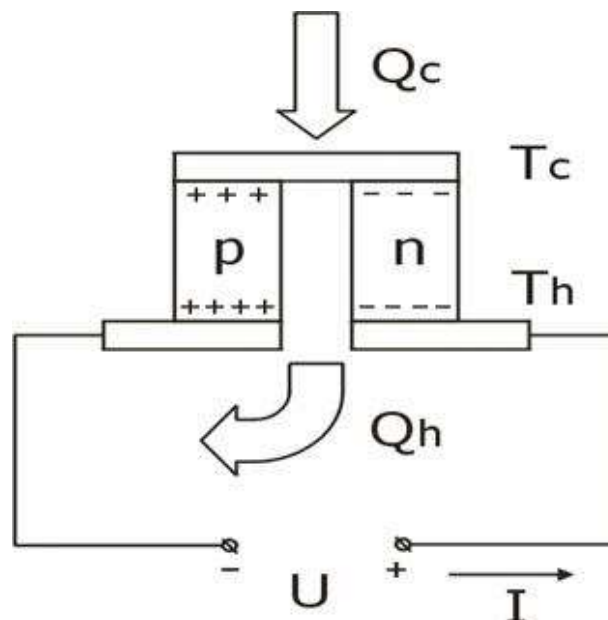


Figura 3.2 – Effetto Peltier

Solitamente vengono usati materiali semiconduttori drogati p e n, quelli di tipo p hanno di solito coefficiente di Peltier positivo, e quelli di tipo n negativo.

Le celle di Peltier, sono delle pompe di calore allo stato solido che operano sfruttando l'effetto Peltier. Le unità termiche utilizzate nel misuratore sono dispositivi a cella di Peltier, con potenze termica in grado di realizzare un robusto gradiente di temperatura.

Le modalità di scambio termico sono differenti: diretta da una parte, tramite una piastra di alluminio, e convettiva dall'altra, tramite dissipatore alettato e ventola. Il cuore del dispositivo è costituito da due celle di Peltier da 50 W ciascuna, collegate elettricamente in serie e alimentate da una tensione di 24 V e corrente massima assorbita di 7,7 A.

La curva C rappresenta nella figura 3.3 descrive l'andamento della potenza termica disponibile in base alla differenza di temperatura (rispetto all'ambiente) imposta.

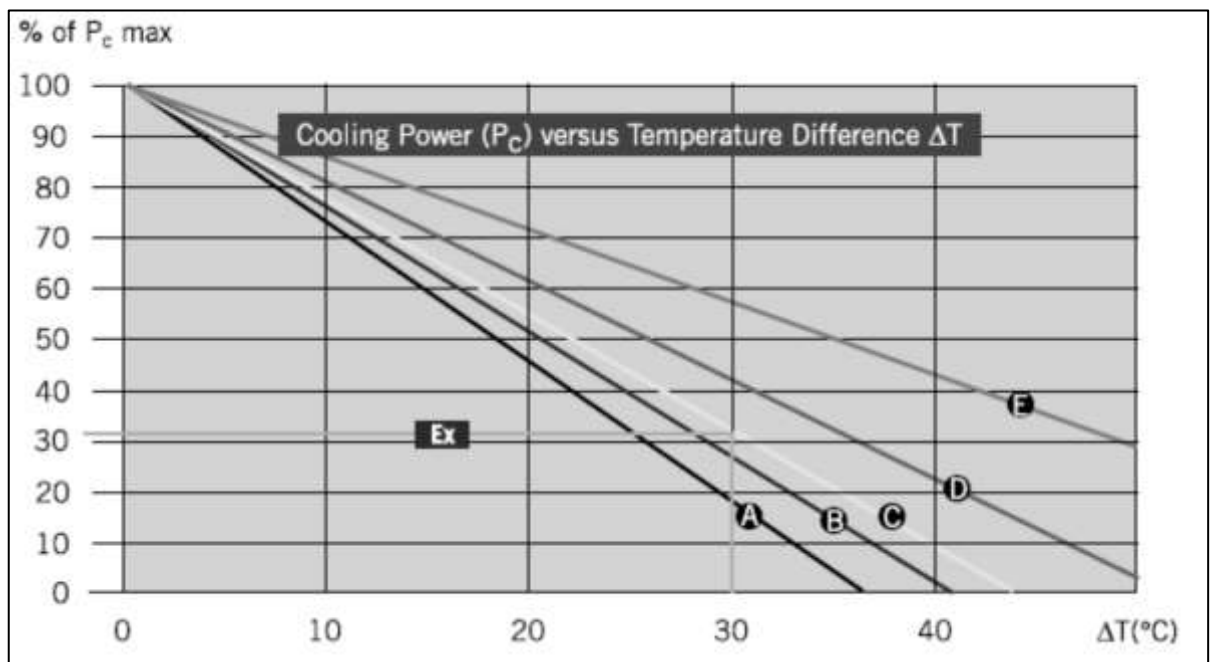


Figura 3.3 – celle Peltier

Il dispositivo ha una superficie attiva di scambio termico di  $120 \times 60 \text{ mm}^2$ , corrispondente all'area effettiva occupata dalle due celle con le quali è a contatto; l'intero apparato invece ha dimensioni  $230 \times 122 \text{ mm}^2$ , quindi sono presenti due piastre di alluminio fresato di tale dimensione per aumentare la superficie di scambio termico.

Per garantire la minore resistenza termica possibile fra le due è stato applicato uno strato di pasta altamente termo conduttiva. Le piastre di alluminio aggiuntive, dello spessore di 10 mm, servono sia da superficie di scambio termico che da supporto per gli strumenti di misura: sonde di temperatura e termo flussimetri. Le termoresistenze per il controllo della temperatura sono alloggiare all'interno di fori frutto di lavorazioni macchine utensili a controllo numerico

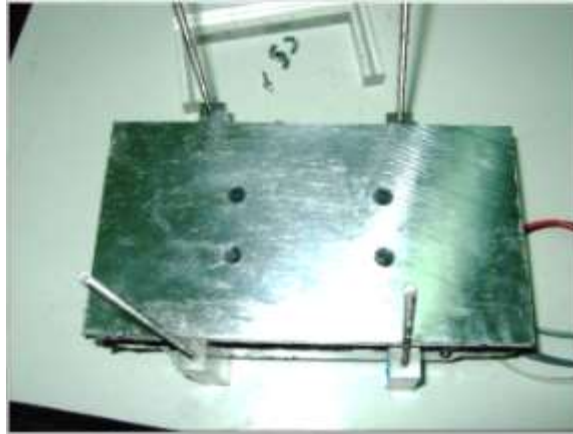


Figura 3.4 – Fori per l'alloggiamento delle termoresistenze PT100

La conduttività termica dell'alluminio per le piastre, sia quelle di partenza che quelle aggiuntive, è di  $130 \frac{W}{mK}$ .

Un involucro isolante, permette di ridurre al minimo gli effetti di bordo per garantire l'isolamento delle superfici laterali di piastre e provino dall'ambiente esterno.

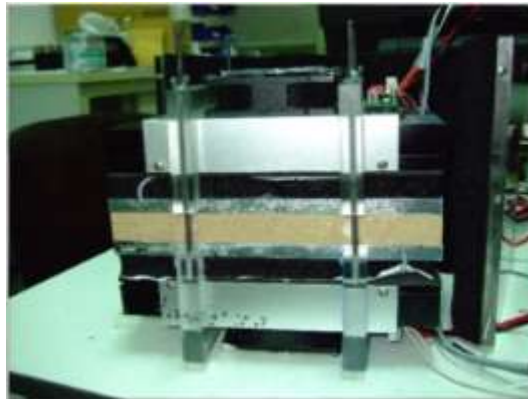


Figura 3.5 – Isolamento termico del dispositivo



La bontà dell'isolamento termico è stata verificata dall'uguaglianza dei flussi termici sui due lati opposti del provino e anche da una indagine qualitativa tramite l'ausilio di una termocamera. Le immagini nella riportate in figura 3.6 mostrano l'isotermia tra le pareti dell'involucro e dell'aria ambiente. Le uniche fonti di calore visibili sono il motorino della ventola di dissipazione e il flusso di aria calda che viene generato dal dissipatore dell'unità termica a bassa temperatura.

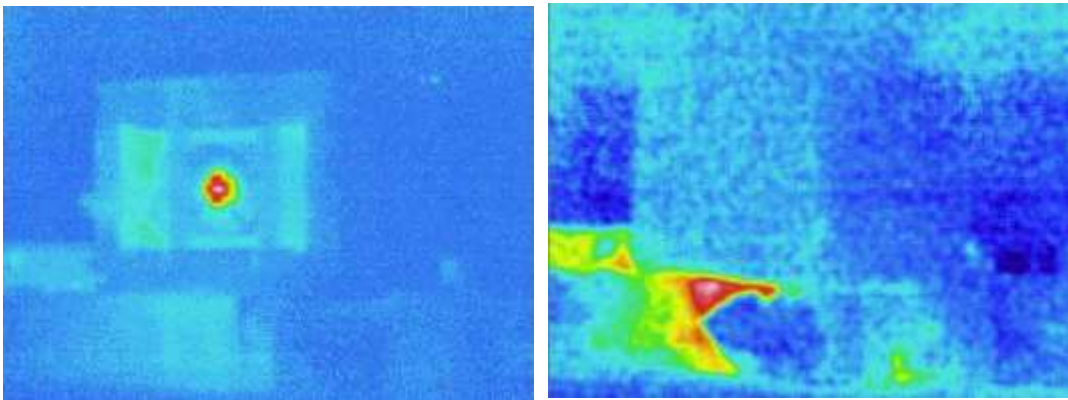


Figura 3.6 – Analisi con termocamera

Le condizioni di omogeneità della temperatura sulle superfici sono verificate con la misura della temperatura tramite le termoresistenze posizionate in due punti diversi della piastra di conduzione.

L'alimentazione delle unità termiche e delle due schede di controllo è operata da alimentatore switching Microset PL 330, regolabile in tensione con range 4-30V e capace di fornire 20 A continui, dotato di amperometro e voltmetro.



Figura 3.7 – Alimentatore

### 3.1.3 Controllo

#### Controllo P.I.D.

Il termine controllo definisce l'azione svolta per portare e mantenere ad un valore prefissato un parametro fisico di un impianto o di un processo (ad esempio, la temperatura di un forno, il livello di un fluido in un serbatoio, la posizione del braccio di un robot, la velocità di rotazione di un motore, ecc.). Indicando con  $r(t)$  il valore che si vuole far assumere alla variabile controllata e con  $y(t)$  il valore effettivamente assunto da tale grandezza, possiamo introdurre una funzione d'errore definita come:  $e(t) = r(t) - y(t)$ . Lo scopo dell'azione di controllo è quello di applicare la migliore scelta possibile della funzione  $u(t)$  (detta variabile di controllo) tale che: renda il sistema asintoticamente stabile, minimizzi il valor medio di  $e^2(t)$  oppure di  $|e(t)|$ , riduca al livello minore possibile il tempo di risposta e le fluttuazioni intorno al valore asintotico in concomitanza di transitori di  $r(t)$ .

Passando alla trasformata di Laplace, possiamo schematizzare il problema nel seguente modo:

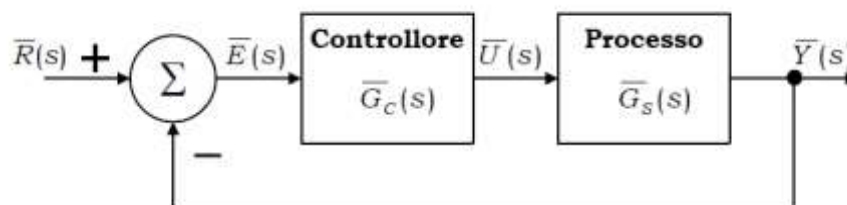


Figura 3.8 – schema a blocchi semplificato di un sistema contenente il controllo attivo di un processo

Le principali componenti del sistema sono: il rivelatore di errore  $\bar{E}(s) = \bar{R}(s) - \bar{Y}(s)$ , il controllore che ha il compito di trasformare il segnale d'errore in un segnale  $\bar{U}(s)$  che agisce sul processo sottoposto a controllo, un sensore posto all'interno del processo che misura la grandezza fisica da controllare fornendo il segnale  $\bar{Y}(s)$ . Supponiamo che sia il controllore sia il processo possano essere schematizzati come sistemi lineari e stazionari caratterizzati da una funzione di trasferimento che varrà, rispettivamente,  $\bar{G}(s)$  e  $\bar{G}_p(s)$ .

Va detto che lo schema mostrato in figura 3.8 è semplificato perché non mostra le sorgenti di rumore interne al sistema e le altre perturbazioni esterne che si sommano ai vari segnali. Una caratteristica essenziale di un buon controllore è quella di possedere una elevata “robustezza” rispetto alle fluttuazioni del sistema, mantenendo la grandezza controllata al valore desiderato anche in presenza di eventuali piccole variazioni della funzione di trasferimento che caratterizza il processo.

Utilizzando la teoria del controllo automatico applicata ai sistemi lineari, scriviamo la funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso:

$$\bar{T}(s) = \frac{\bar{Y}(s)}{\bar{R}(s)} = \frac{\bar{G}_C(s) \cdot \bar{G}_P(s)}{1 + \bar{G}_C(s) \cdot \bar{G}_P(s)}$$

Il problema generale del controllo si riduce quindi a determinare, per una certa funzione di trasferimento del processo  $\bar{G}_P(s)$ , la migliore funzione di trasferimento del controllore  $\bar{G}_C(s)$  che ottimizza la  $\bar{T}(s)$ .

Uno schema ampiamente utilizzato è quello PID, acronimo che indica l’utilizzo combinato di tre funzioni di controllo di tipo Proporzionale, Integrale e Differenziale. Lo schema generale di un controllore di tipo PID è mostrato in figura 3.9.

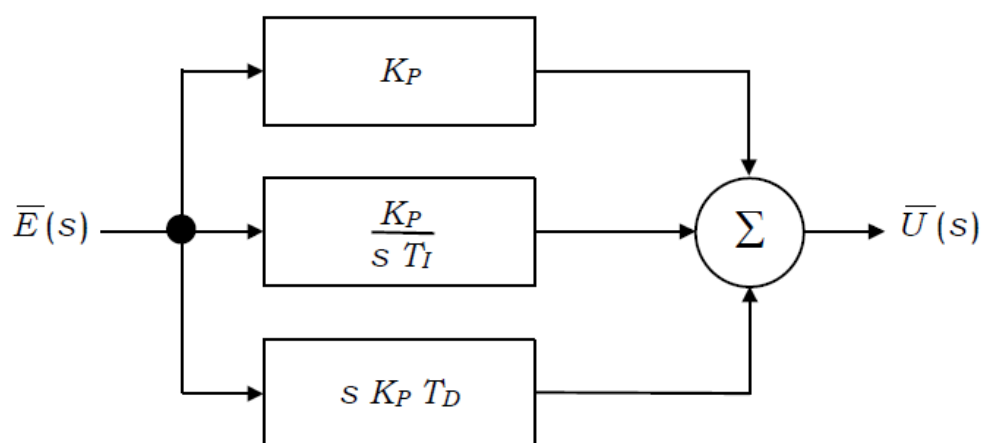


Figura 3.9 – schema a blocchi di un controllore di tipo PID

In pratica l'uscita di un controllore PID è costituita dalla somma di tre termini:

$$\bar{U}(s) = K_p \cdot \left( 1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right) \cdot \bar{E}(s)$$

dove  $K_p$ ,  $T_I$  e  $T_D$  sono tre costanti positive.

Il primo termine,  $K_p$ , è detto coefficiente proporzionale. Ponendo  $T_D = 0$  e  $T_I = \infty$  l'equazione precedente si riduce a:  $\bar{U}_s = K_p \cdot \bar{E}(s)$  e, in tal caso, si parla di controllore proporzionale o di tipo P. Il contributo dovuto a  $K_p$  è appunto proporzionale all'errore e diminuisce man mano che l'errore si avvicina a zero. Al crescere di  $K_p$  il guadagno in continua del sistema si avvicina all'unità e la costante tempo viene ridotta. In altre parole, aumentando  $K_p$ , il valore asintotico dell'uscita sarà sempre più vicino al valore richiesto (1 per il nostro segnale d'entrata corrispondente ad un gradino di ampiezza unitaria) e si osserva una contemporanea riduzione del tempo necessario per arrivare a tale livello asintotico.

Notiamo tuttavia che l'uscita non arriverà mai esattamente al valore richiesto, a meno di non far tendere  $K_p$  all'infinito. Il valore asintotico dell'errore viene detto offset. Utilizzando un controllore esclusivamente proporzionale (P) si produce una differenza (offset) tra il valore richiesto e quello effettivamente ottenuto. Tale differenza può essere ridotta aumentando il guadagno del controllore. Tuttavia, se il processo da controllare possiede coppie di poli c.c., l'aumento del coefficiente proporzionale è accompagnato da un corrispondente aumento delle oscillazioni generate a seguito di rapidi transitori.

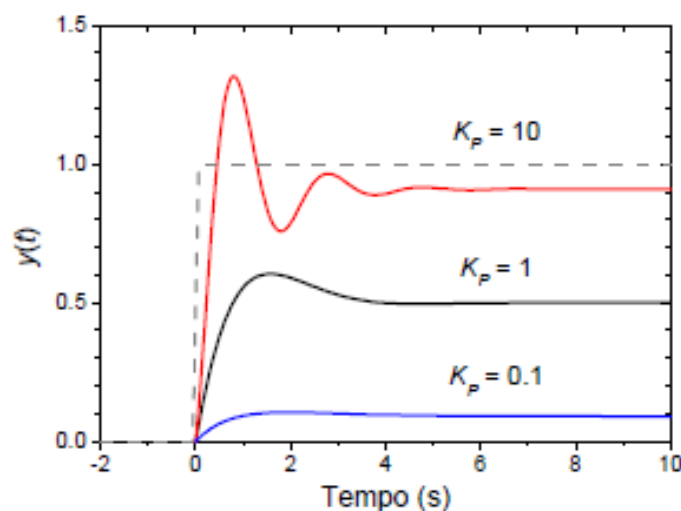


Figura 3.10 – Risposta ad un gradino di ampiezza unitaria, gestito tramite un controllore di tipo proporzionale (P)

Per porre rimedio a questo problema è necessario aggiungere al termine proporzionale un termine aggiuntivo che elimini a priori la presenza dell'offset (errore a regime). In un controllore PID tale funzione è svolta dal termine inversamente proporzionale a  $s \cdot T_I$ , detto anche contributo integrale. È evidente che in presenza di un offset costante il contributo integrale è destinato a crescere indefinitamente nel tempo e questo ci permette di attivare una efficace azione correttiva. La costante  $T_I$  è detta tempo di reset.

L'effetto dell'integrazione è tanto più importante, quanto più  $T_I$  è piccolo. L'effetto della scelta di  $T_I$  è mostrato in figura 3.11. Si nota che l'offset presente quando si opera solo con il controllore proporzionale  $T_I \rightarrow \infty$  sparisce attivando il termine integrale. Riducendo  $T_I$  il sistema risponde più velocemente al transitorio, ma si osservano anche delle forti oscillazioni.

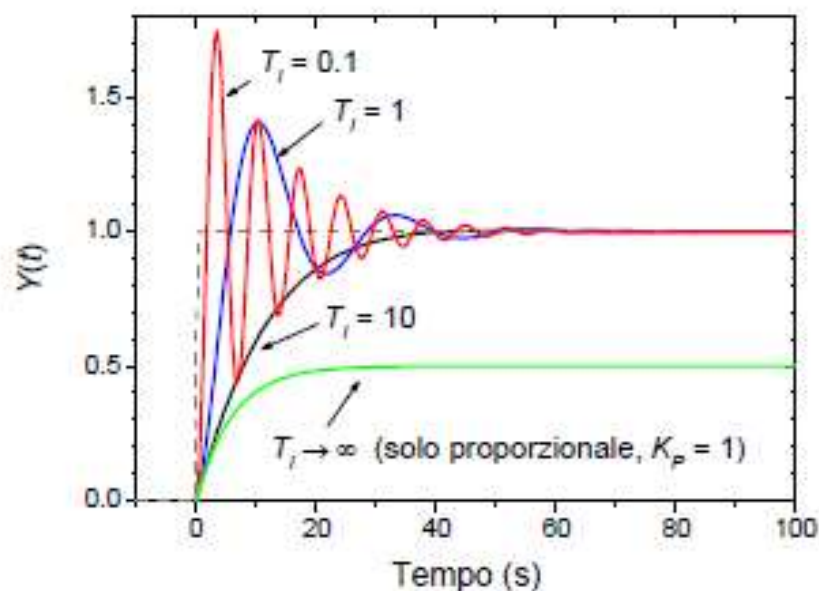


Figura 3.11 – risposta ad un gradino di ampiezza unitaria, gestito tramite un controllore PI

Passiamo ora al terzo termine di un controllore PID, quello derivativo. Il contributo derivativo al controllo tiene conto delle rapide variazioni dell'errore e cerca, in qualche modo, di anticipare la futura azione correttiva tenendo conto delle variazioni dell'errore nei tempi più recenti. In pratica questo si concretizza in una riduzione delle oscillazioni. Il contributo derivativo permette di ridurre le oscillazioni spurie del sistema, evitando che questo oscilli intorno al valore asintotico.

D'altro canto, in presenza di un forte rumore esterno, il contributo derivativo tende ad amplificare l'effetto del rumore producendo una instabilità addizionale del sistema.

In conclusione, il problema del progetto di un controllore PID si riduce alla scelta dei valori più opportuni per i parametri  $K_P$ ,  $T_I$  e  $T_D$ . Tale scelta non è banale perché richiede la conoscenza dettagliata delle proprietà del processo che si vuole controllare. Esistono vari metodi per effettuare la scelta (tuning) dei coefficienti più opportuni.

### Metodo di "Ziegler e Nichols" per la sintesi dei parametri dei regolatori PID

L'idea che sta alla base di questo metodo può essere spiegata qualitativamente tenendo presenti i risultati ottenuti studiando la stabilità dei sistemi reazionati. In molti casi il sistema reazionato è stabile ad anello chiuso solo se il guadagno in continua ad anello aperto è mantenuto ad un livello sufficientemente piccolo.

Aumentando il guadagno in continua il sistema diventa instabile. Ricordiamo che tra la zona di stabilità (poli della funzione di trasferimento ad anello chiuso con componente reale negativa) e la zona di instabilità (poli con componente reale positiva) esiste un limite (poli con componente reale nulla) in cui il sistema non diverge, ma oscilla con ampiezza di oscillazione costante. Quindi, se aumentando il guadagno in continua si arriva ad una situazione di oscillazione stabile, possiamo assumere che un valore di guadagno in continua nettamente inferiore a tale limite possa corrispondere ad una condizione di lavoro ragionevole.

La procedura da seguire per l'ottimizzazione del controllore è la seguente:

1. Annullare, o quantomeno ridurre al minimo livello possibile, le azioni di integrazione e derivata facendo lavorare il controllore in modo puramente proporzionale.
2. Operando ad anello chiuso, aumentare progressivamente (e prudentemente) il valore di  $K_P$  fino a che si osserva che l'uscita  $y(t)$  oscilla in modo permanente (limite di stabilità). Indichiamo con  $K_0$  il valore limite di  $K_P$ . Indichiamo con  $T_0$  il periodo di oscillazione misurato quando  $K_P = K_0$ . Se il sistema non entra mai in oscillazione, il metodo non è applicabile.

	<b>P</b>	<b>PI</b>	<b>PID</b>
$K_P$	$0.5 \cdot K_0$	$0.45 \cdot K_0$	$0.6 \cdot K_0$
$T_I$		$0.5 \cdot T_0$	$0.5 \cdot T_0$
$T_D$			$0.125 \cdot T_0$

*Tabella 3.1 – scelta dei parametri a seconda della configurazione del controllore secondo il metodo di Ziealer e Nichols*

A seconda della configurazione del controllore, applicare i parametri della Tabella 3.1.

Per concludere, si ricordano alcuni limiti pratici dei metodi di tuning dei controllori appena descritti. Noi abbiamo sempre assunto che i processi da controllare siano lineari e stazionari.

Purtroppo tali approssimazioni non sono sempre valide. In particolare, uno degli errori più comuni è quello di ottimizzare i parametri del controllore quando il processo da controllare si trova in condizioni molto diverse da quelle operative.

In tal caso eventuali non-linearità possono giocare un ruolo importante e l'ottimizzazione iniziale può perdere di significato, specialmente nel caso in cui sia stato adottato il metodo di Cohen e Coon. In altri casi le oscillazioni che devono essere innescate per tarare il controllore secondo il metodo di Ziegler e Nichols possono provocare danni al processo stesso.

Quindi, nella pratica, bisogna operare con prudenza ricordando che i metodi semi-empirici appena descritti forniscono una ottimizzazione solo parziale del controllore.

Il risultato finale dipende strettamente dal comportamento dinamico del processo sotto controllo. Per applicazioni critiche, si può ricorrere ad una ottimizzazione sperimentale dei parametri, utilizzando come punto di partenza quelli ottenuti con metodi semi-empirici oppure è necessario ricorrere a metodi di progetto più sofisticati.

## Controller

Le unità termiche sono pilotate tramite dei controller elettronici dedicati per celle di Peltier della TE Technology, Inc, modello TC-48-20 OEM mostrato in figura 3.12.

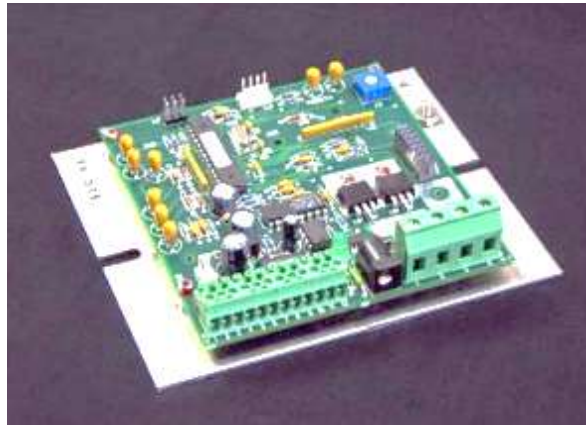


Figura 3.12 – Controller NATIONAL INSTRUMENTS

Questi controller integrano sia la parte di controllo, svolta da un regolatore di tipo PID, che quella di potenza, e sono in grado di pilotare celle di Peltier con alimentazione variabile da 0 a 48 V e correnti fino a 20 A. L'interfacciamento col pc avviene tramite interfaccia seriale attraverso un convertitore seriale-usb. La parte di potenza è realizzata tramite un modulatore PWM. Per il feedback della temperatura utilizza un termistore con resistenza di 10000  $\Omega$  a 25°C, ed è anche possibile collegarne un secondo da utilizzare come monitoraggio o allarme. Il termistore ha precisione  $\pm 0,1^\circ\text{C}$ . Il software di controllo e visualizzazione dei dati è scritto in LabVIEW, in figura 3.13 si riporta il pannello frontale del programma.



Figura 3.13 – Pannello frontale in LabVIEW

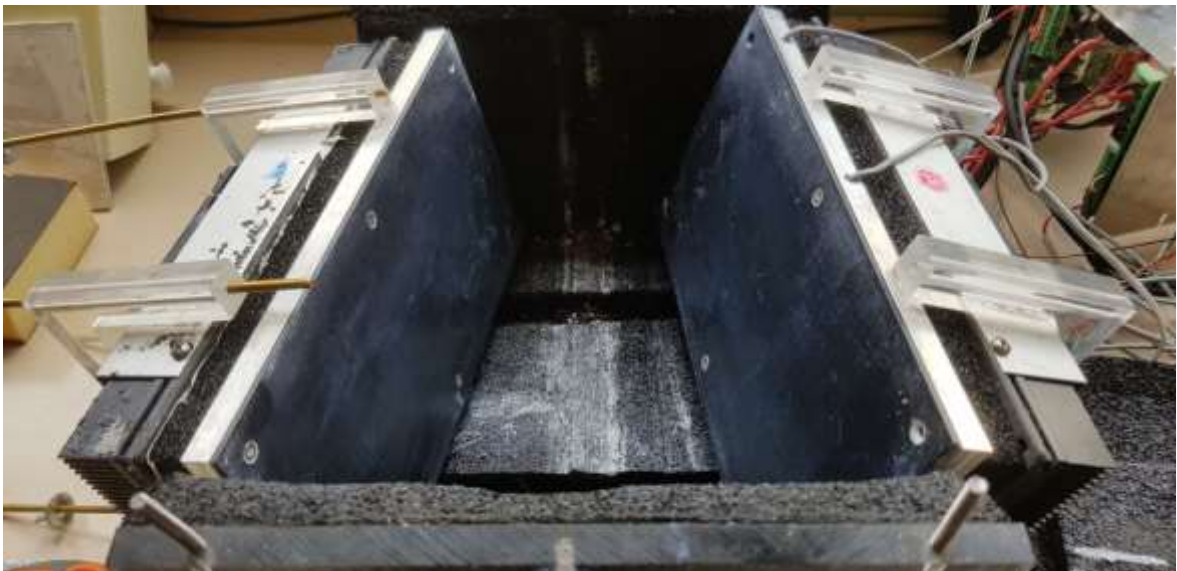


Dal software è possibile regolare le costanti del regolatore PID, i set-point di temperatura, la modalità di funzionamento (riscaldamento o raffreddamento), impostare allarmi, e si ha la visualizzazione della potenza fornita alla cella e l'andamento nel tempo delle temperature misurate dai due sensori, con dati aggiornati ogni secondo.

### 3.2 Termoflussimetri

La misura della densità di flusso di calore viene fatta con due termo-flussimetri della INTERNATIONAL THERMAL INSTRUMENT COMPANY. E' stata fatta una modifica rispetto alla configurazione iniziale la quale prevedeva l'utilizzo di due cialde termoflussimetriche posizionate tra le unità termiche e le facce del provino in una posizione approssimativamente centrale.

I termoflussimetri si presentano come due piastre solide (12,2 x 23 cm) con temperatura massima di funzionamento 150°C. Queste piastre trasduttrici sono progettate per misurare direttamente il flusso termico e si trovano a diretto contatto con le due facce dei provini delle quali si vuole misurare il flusso termico.



*Figura 3.14 – Termoflussimetri a piastra*

Il flusso di calore che attraversa la superficie crea piccole differenze di temperature tra la superficie più alta e più bassa del termoflussimetro. Queste superfici sono in contatto termico con delle speciali termopile ad alta temperatura che generano un segnale in corrente continua a seconda della differenza di temperatura rilevata: questo segnale è direttamente proporzionale al flusso termico che attraversa il dispositivo. Le centinaia di elementi termoelettrici presenti in ogni unità delle termopile forniscono segnali di tensione in multi-millivolt. La resistenza termica introdotta dal termo flussimetro è trascurabile per la maggior parte delle applicazioni.

Una volta che il dispositivo si trova in equilibrio termico con le superfici, fornisce un segnale di tensione, proporzionale al flusso di calore, che viene letto con un data logger e moltiplicato per una specifica costante di calibrazione ( $4,04 \frac{W}{m^2 \cdot mV}$  per il flussimetro posizionato sulla superficie raffreddata,  $4,14 \frac{W}{m^2 \cdot mV}$  per quello posizionato sulla superficie riscaldata) permettendo di ottenere un risultato in termini di flusso di calore.

### 3.3 Sonde temperature

#### 3.3.1 Termoresistenze

I termometri a resistenza metallici, più comunemente chiamati termoresistenze si basano sulla variazione della resistenza elettrica di un metallo al variare della temperatura a cui lo stesso è sottoposto.

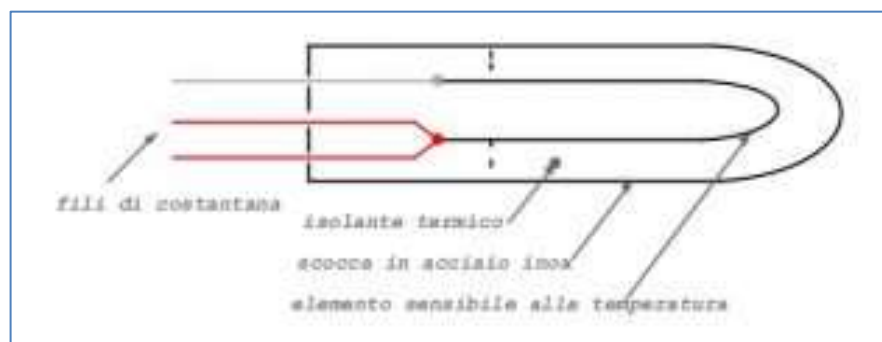


Figura 3.15 – schema di una termoresistenza

Tra i materiali maggiormente utilizzati per la costruzione di termoresistenze troviamo principalmente platino e nichel, per la loro elevata resistività e stabilità. Le misurazioni di temperatura effettuate per mezzo delle termoresistenze sono, infatti, nettamente più precise e affidabili rispetto a quelle delle termocoppie.

Normalmente, i termometri a resistenza metallici vengono identificati con la sigla del materiale utilizzato per la loro costruzione, ovvero Platino = Pt, Nichel = Ni, ecc...), seguito dalla loro resistenza nominale alla temperatura di 0°C. Il campo di utilizzo dei termometri a resistenza industriali è compreso tra -200 e +850°C. Le termoresistenze si suddividono principalmente in due sottocategorie:

- Sensori PT100 (anche comunemente chiamati “sonde PT100”)
- Sensori PTC(anche comunemente chiamati “sonde PTC”)

### 3.3.2 Termocoppie

Una termocoppia è costituita da una coppia di conduttori elettrici di diverso materiale uniti tra loro in un punto.

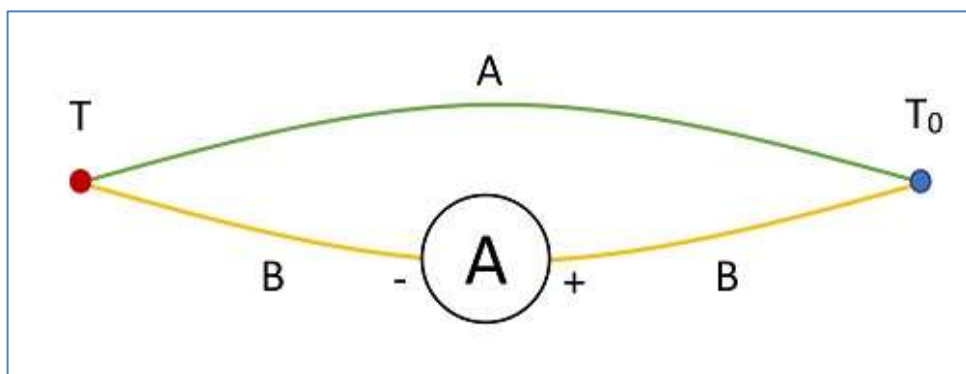


Figura 3.16 – Schema di una termocoppia

Questa giunzione è convenzionalmente chiamata giunto caldo o giunzione calda, ed è il punto nel quale viene applicata la temperatura da misurare. L'altra estremità, costituita dalle estremità libere dei due conduttori, è convenzionalmente chiamata giunto freddo o giunzione fredda. Quando esiste una differenza di temperatura tra la zona del giunto caldo e la zona del giunto freddo, in corrispondenza di quest'ultimo si può rilevare una differenza di potenziale elettrico, tanto maggiore tanto più alta è la temperatura. In alcune applicazioni si può, tramite un termistore o una termoresistenza, misurare la temperatura della giunzione fredda e utilizzarla per correggere elettricamente il segnale proveniente dalla termocoppia.

Infatti visto che la tensione viene spesso misurata a temperatura ambiente, il valore di tensione visualizzato sarebbe troppo basso se confrontato con il valore della tensione a temperatura ambiente. Per ottenere il valore di temperatura assoluta del punto di misura, viene usata la cosiddetta "compensazione del giunto freddo". Si effettua la calibrazione immergendo il giunto dell'estremità fredda della termocoppia e i cavi del voltmetro in un bagno di ghiaccio.

### 3.3.3 Sonde nel dispositivo

Per la rilevazione delle temperature il misuratore utilizza termocoppie di tipo K (Chromel (Ni-Cr) (+) / Alumel (Ni-Al) (-)) e di tipo T (Rame (Cu) (+) / Costantina (Cu-Ni) (-)) e delle termo resistenze PT100. Per la misura della temperatura ambiente e per effettuare il controllo delle unità termiche vengono utilizzate termo resistenze PT100, per la misure delle temperature sulla superficie del provino vengono utilizzate delle termocoppie. Nella configurazione originale le termoresistenze utilizzate per il controllo delle unità termiche fornivano anche i dati relativi alle temperature superficiali del provino. Per ottenere una misura di temperatura molto più precisa e prossima all'effettiva temperatura delle facce del provino vengono attualmente utilizzate due termocoppie posizionate nel cuore della piastra contenente i termoflussimetri: grazie al loro alloggiamento esse non risentono dell'influenza dell'ambiente esterno.

Come già descritto le termo resistenze vengono comunque utilizzate per effettuare il controllo della temperatura delle piastre; esse sono infatti collegate ai due controller delle unità termiche.



Figura 3.17 – Termoresistenza PT100

Allo stesso controller è collegata una termoresistenza della stessa tipologia che permette di rilevare la temperatura ambiente. Gli elementi Pt100, racchiusi in un involucro di acciaio inox del diametro di 4 mm e lungo 50 mm, sono inseriti nelle sedi ricavate sulle piastre con l’aggiunta di pasta termoconduttiva che riduce la resistenza termica al contatto.

La classe di precisione delle termoresistenze è  $\frac{1}{3}$  DIN, quindi esse presentano una precisione di  $\pm 0.1^\circ\text{C}$  come indicato nella tabella 3.2, e il collegamento elettrico è effettuato con 4 fili, poiché in questo caso la misura non è influenzata né dalla resistenza dei fili né dalla temperatura ambiente alla quale i fili stessi sono sottoposti.

Temp °C	Tolerance									
	CLASS B		CLASS A		1/3 DIN		1/5 DIN		1/10 DIN	
	+/- °C	+/- OHMS	+/- °C	+/- OHMS	+/- °C	+/- OHMS	+/- °C	+/- OHMS	+/- °C	+/- OHMS
-200	1.3	0.56	0.55	0.24	0.44	0.19	0.26	0.11	0.13	0.06
-100	0.8	0.32	0.35	0.14	0.27	0.11	0.16	0.06	0.08	0.03
0	0.3	0.12	0.15	0.06	0.1	0.04	0.06	0.02	0.03	0.01
100	0.8	0.3	0.35	0.13	0.27	0.1	0.16	0.05	0.08	0.03
200	1.3	0.48	0.55	0.2	0.44	0.16	0.26	0.1	0.13	0.05
300	1.8	0.64	0.75	0.27	0.6	0.21	0.36	0.13	0.18	0.06
400	2.3	0.79	0.95	0.33	0.77	0.26	0.46	0.16	0.23	0.08
500	2.8	0.93	1.15	0.38	0.94	0.31	0.56	0.19	0.28	0.09
600	3.3	1.06	1.35	0.43	1.1	0.35	0.66	0.21	0.33	0.1
650	3.6	1.13	1.45	0.46	1.2	0.38	0.72	0.23	0.36	0.11

NOTE: TOLERANCES ARE CALCULATED TO 2 DECIMAL POINTS AND ARE TAKEN AS A FRACTION OF CLASS B.

Tabella 3.2

Come già accennato le sonde sono collegate ai due controller della TE Technology, Inc, modello TC-48-20 OEM. Essi permettono la conversione di quattro valori di temperatura rilevati tramite sonde PT100, in altrettanti rispettivi valori di tensione. La curva di risposta del segnale viene linearizzata tramite moduli ibridi (TLC05) permettendo un interfacciamento molto semplice. Il modulo è tarato in fabbrica per il range di temperatura 0-100°C al quale corrisponde una tensione in uscita di 0-10V, con risposta lineare. Per l'alimentazione del modulo è necessaria una sola alimentazione anche non stabilizzata.

Le termocoppie che rilevano la temperatura delle due facce sottoposte a riscaldamento e raffreddamento sono di tipologia T mentre per la misura della temperatura su altri lati del provino viene utilizzata una termocoppia di tipologia K. Le temperature misurate sono assunte uniformi sulle facce del provino; questa ipotesi è stata confermata confrontando la temperatura misurata con delle termoresistenze in due punti diversi della stessa faccia come mostrato in figura 3.18

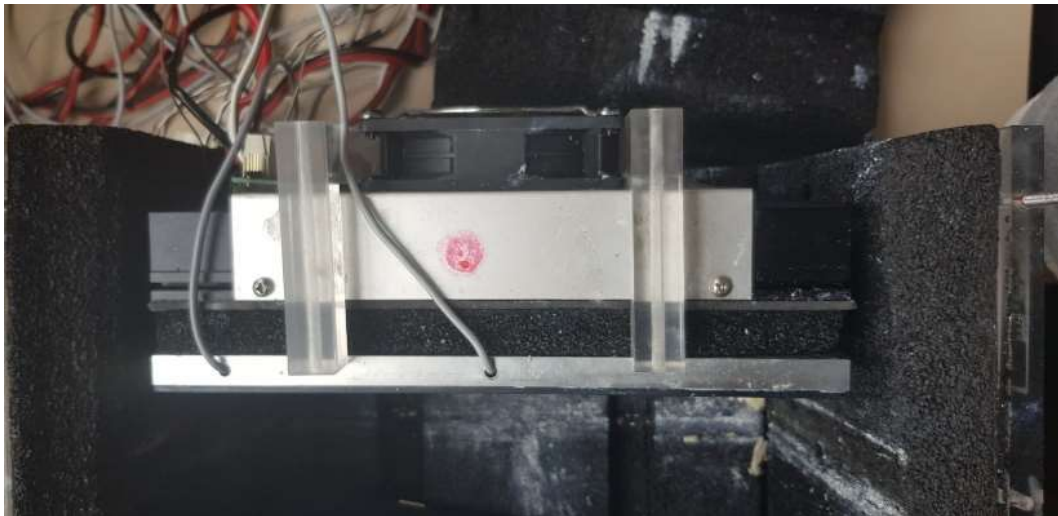


Figura 3.18

TIPO (UNI7938)	Elementi +/-	Campo di temperatura (°C)
E	Cromel/Costante	0 ÷ 900
J	Ferro/Costante	-200 ÷ 700
K	Cromel/Alumel	-200 ÷ 1200
R,S	Platino-Rodio/Platino	0-÷1400
T	Rame/Costante	-200÷350
C	Tungsteno/Renio	0÷2000

Tabella 3.3 – Tipologie di termocoppie

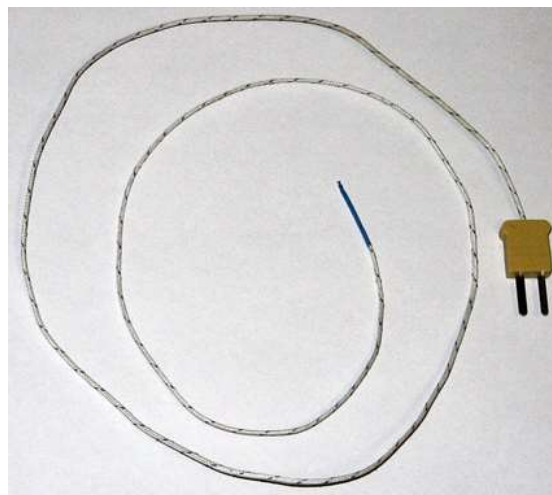


Figura 3.19 – Termocoppia K

Mentre per le termocoppie di tipologia T si utilizza una compensazione del giunto freddo elettronica, per la termocoppia di tipologia K (figura 3.19) viene effettuata la calibrazione del giunto freddo con un bagno di acqua e ghiaccio prima di ogni prova.

### 3.4 Acquisizione ed elaborazione dati

Tutti i dati vengono raccolti, elaborati e visualizzati tramite il software LabVIEW installato su un pc. I segnali inviati dai termo-flussimetri e dalle termocoppie alloggiati nelle piastre termo-flussimetriche sono acquisiti mediante una scheda di acquisizione usb della National Instruments NI USB-9219 in figura 3.20, un modulo C Series universale a quattro canali progettato per test multiuso. Gli intervalli si differenziano per ciascun tipo di misura e includono fino a  $\pm 60$  V per la tensione e  $\pm 25$  mA per la corrente. La risoluzione ADC di 24 bits.



Figura 3.20 – NI USB-9219



Figura 3.21 – C—NI-9211

Il segnale della termocoppia utilizzata per la misura di temperatura superficiale sulle altre facce del provino è invece acquisita con una scheda di acquisizione della National Instruments C—NI-9211 in 3.21 che include filtri di anti-aliasing, rilevamento a termocoppia aperta e compensazione del giunto freddo per misure di termocoppia ad accuratezza elevata.

Tutti i segnali vengono elaborati dal software che fornisce una rappresentazione grafica come mostrato nelle seguenti immagini.



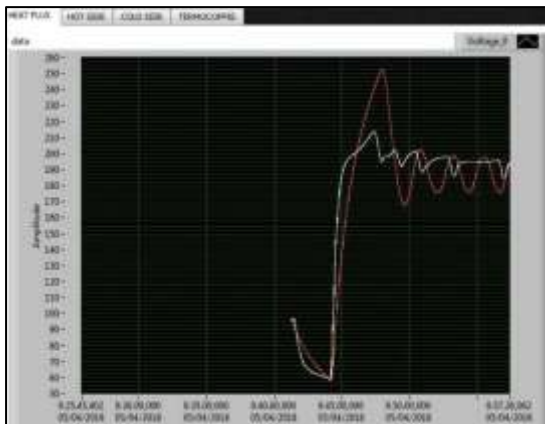


Figura 3.22 – Flusso di calore specifico

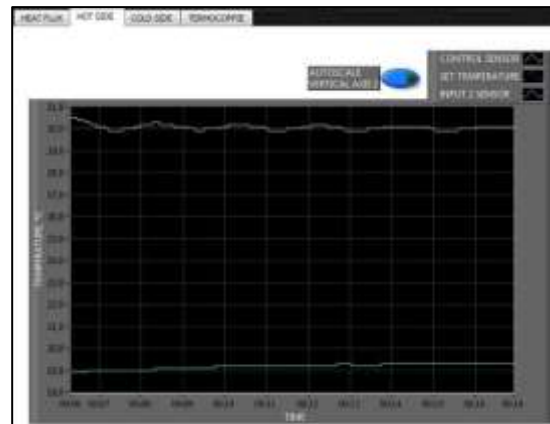


Figura 3.23 – Temperatura su piastra calda

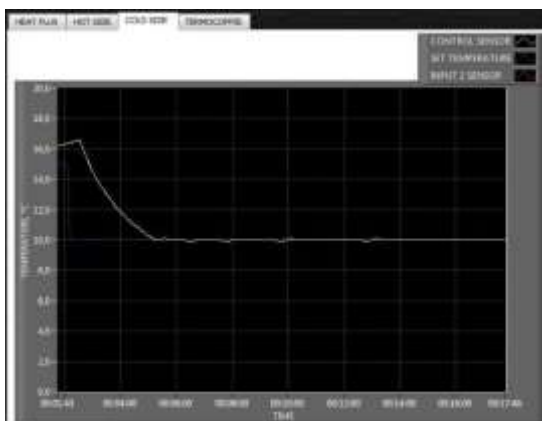


Figura 3.24 – Temperatura su piastra fredda



Figura 3.25 – Temperature misurate dalle termocoppie

Nella figura 3.22 troviamo la rappresentazione grafica dei flussi di calore specifici (grandezza misurata direttamente dal termoflussimetro); nelle Figure 3.23 e 3.24 sono invece rappresentati gli andamenti temporali delle temperature utilizzate per il controllo, misurate con le termoresistenze. La figura 3.25 riporta invece le temperature superficiali del provino misurate tramite termocoppie.

Nello schema logico della figura 3.26 invece sono visualizzati alcuni degli operatori che sono necessari all’elaborazione dei dati e il loro “cablaggio”.

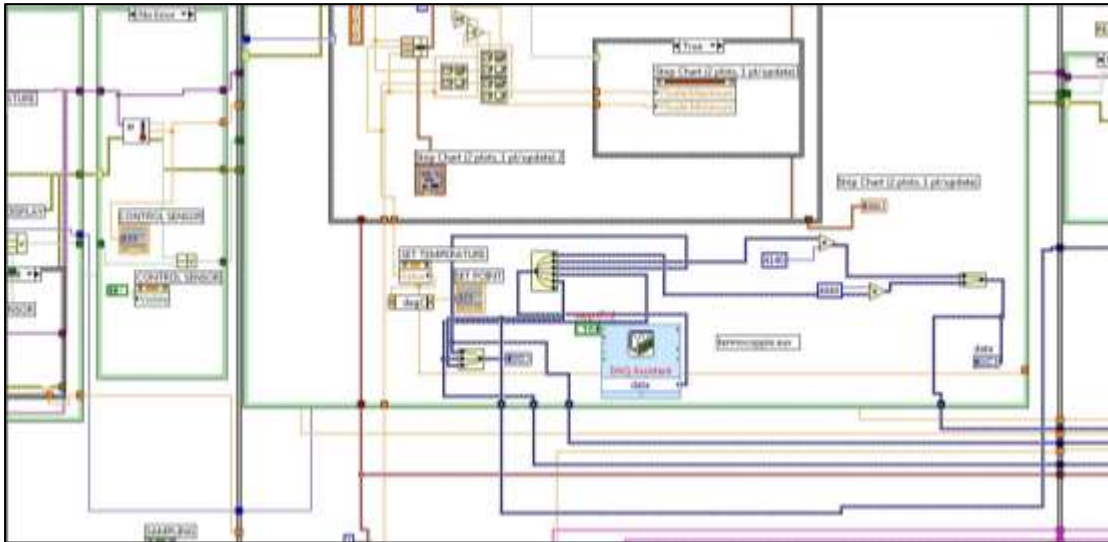


Figura 3.26 –LabVIEW Block Diagram

Prima di iniziare ogni prova è necessario configurare i parametri relativi alle sorgenti di ingresso (numero e tipo dei canali da acquisire e spessore del provino presente nel misuratore) ed impostare i set point in temperatura delle due unità termiche. Dopo queste operazioni preliminari si può dare avvio all'acquisizione dei dati; in base al tipo di materiale che si sta analizzando occorre impostare i giusti parametri del regolatore PID, in modo che le temperature si mantengano costanti durante il periodo di misura, che varia a seconda della resistenza termica del materiale. Una volta che il sistema si porta a regime, è possibile ottenere i valore della conducibilità termica.

## CAPITOLO 4

# MODELLIZZAZIONE

Il fenomeno della conduzione termica in un materiale omogeneo, uniforme e isotropo in regime non stazionario e in assenza di generazione interna è governato dall'equazione di Fourier:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

I termini al primo membro rappresentano la propagazione dell'energia nel corpo per conduzione (generata da un gradiente di temperatura); il termine a secondo membro rappresenta la variazione di energia interna in un corpo a massa volumica costante. L'equazione di Fourier è un'equazione differenziale alle derivate parziali (PDE) di secondo grado, nell'incognita  $T$  e nelle variabili tempo ( $t$ ), spazio  $x = (x, y, z)$ .

La soluzione analitica dell'equazione è ricavabile solo in casi molto semplificati sia dal punto di vista geometrico, sia per quanto riguarda le condizioni al contorno e le proprietà termofisiche del materiale. La soluzione del campo di temperatura  $T(x, y, z, t)$  per geometrie complesse (2D, 3D) e per l'applicazione di condizioni al contorno non riproducibili da funzioni elementari (ad esempio segnali non periodici) si ricava per via numerica e non analitica. Tra i metodi più utilizzati per risolvere problemi che comportano equazioni alle derivate parziali vi sono i metodi alle differenze finite nei quali le derivate vengono approssimate mediante operatori alle differenze delle equazioni differenziali di partenza. Nel presente lavoro è stato utilizzato più precisamente metodo alle differenze finite all'indietro. Il caso preso in esame riguarda la trasmissione del calore in regime transitorio all'interno di un materiale solido omogeneo, uniforme, isotropo e con geometria semplice. Il problema fisico è stato trattato matematicamente partendo dal caso unidimensionale, dopodiché il modello è stato sviluppato per il caso bidimensionale.

A tal proposito si coglie l'occasione per ringraziare il gruppo di ricerca di matematica informatica del prof. G. Rodriguez ed in particolar modo la dottoressa Anna Concas, dottoranda del gruppo sopra citato

## 4.1 Modellizzazione matematica

### 4.1.1 Caso monodimensionale

In una dimensione il problema della diffusione del calore in un materiale omogeneo, uniforme e isotropo sottoposto ad un gradiente termico è rappresentabile alla conduzione del calore lungo un filo passante per il centro geometrico del materiale, come rappresentato in figura in figura 4.1.

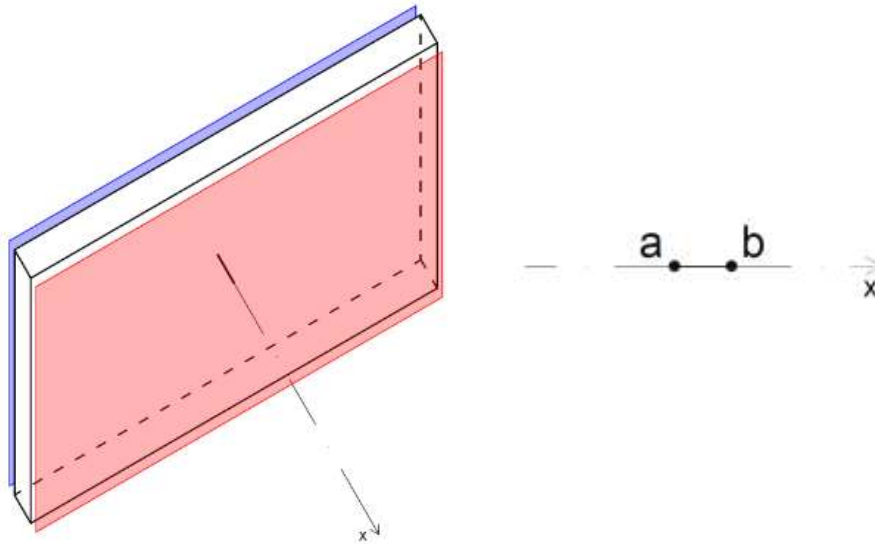


Figura 4.1 – caso monodimensionale

L'equazione di Fourier in questo caso può essere riscritta come segue:

$$\frac{\partial^2 U(x, \tau)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial U(x, \tau)}{\partial \tau} + F(x, \tau) \quad x \in [a, b], \quad \forall \tau \geq 0$$

Con

- le condizioni al contorno di Dirichlet  $\forall \tau \geq 0$

$$U(a, \tau) = \Phi_a(\tau)$$

$$U(b, \tau) = \Phi_b(\tau)$$

- le condizioni iniziali  $U(x, 0) = \psi(x) \quad x \in [a, b]$

Si ponga  $U(x_i, t_j) = u_{ij}$  e  $F(x_i, t_j) = f_{ij}$  e si consideri la mesh:

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n + 1$$

Dove  $h = \frac{b-a}{n+1}$  rappresenta il passo nello spazio e  $h_t = \frac{T}{m}$  il passo nel tempo. Utilizzando il metodo alle differenze finite all'indietro per  $j = 1, \dots, m$  si ottiene la seguente equazione lineare:

$$\frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{h_t} = \alpha \frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h^2} + f_{ij}$$

Che si può anche riscrivere come:

$$-u_{i-1,j} + \left( \frac{1}{\alpha} \frac{h^2}{h_t} + 2 \right) u_{ij} - u_{i+1,j} = \frac{1}{\alpha} \frac{h^2}{h_t} u_{i,j-1} + \alpha h^2 f_{ij}$$

Ponendo  $k = \frac{1}{\alpha} \frac{h^2}{h_t}$  e  $\tilde{f}_{ij} = \alpha h^2 f_{ij}$  per  $j = 1, 2, \dots, m$  si può scrivere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} (k+2)u_{1j} - u_{2j} = ku_{1,j-1} + \tilde{f}_{1j} + u_{0j} \\ -u_{i-1,j} + (k+2)u_{ij} - u_{i+1,j} = ku_{i,j-1} + \tilde{f}_{ij} \\ -u_{n-1,j} + (k+2)u_{nj} = ku_{n,j-1} + \tilde{f}_{nj} + u_{n+1,j} \end{cases} \quad i = 2, \dots, n-1$$

Oppure in forma matriciale:

$$T = \begin{bmatrix} k+2 & -1 & & & \\ -1 & k+2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & -1 & k+2 \end{bmatrix}, \quad u_j = \begin{bmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ \vdots \\ u_{nj} \end{bmatrix}$$

e:

$$b_j = \begin{bmatrix} ku_{1,j-1} \\ ku_{2,j-1} \\ \vdots \\ ku_{n,j-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{f}_{1j} \\ \tilde{f}_{2j} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{nj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{0j} \\ 0 \\ \vdots \\ u_{n+1,j} \end{bmatrix}.$$

### 4.1.2 Caso bidimensionale

In due dimensioni il problema della diffusione del calore in un materiale omogeneo, uniforme e isotropo è riconducibile ad un problema di diffusione di calore attraverso la superficie che si trova nella mediana del materiale come mostrato in figura 4.2. Sotto le condizioni di omogeneità, isotropicità ed uniformità il campo termico che si sviluppa nella parte superiore ed inferiore a questa superficie sono simmetrici.

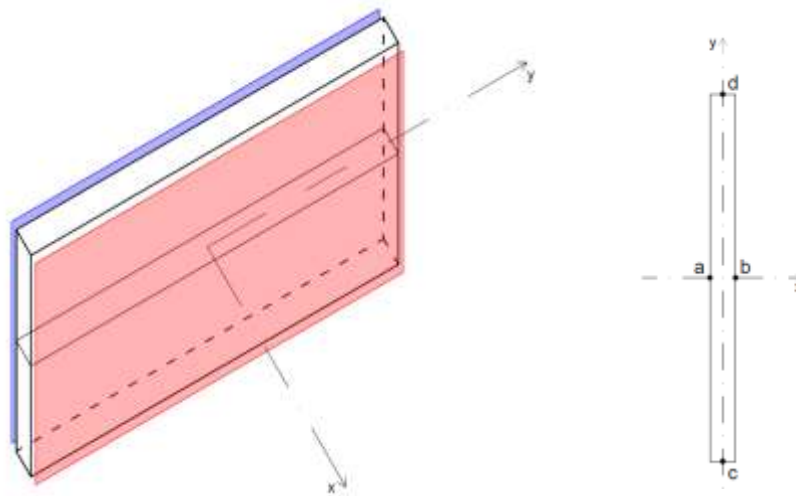


Figura 4.2 caso bidimensionale

Si consideri l'equazione di Fourier nel caso bidimensionale:

$$\left( \frac{\partial^2 U(x, y, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, \tau)}{\partial y^2} \right) + F(x, y, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial U(x, y, \tau)}{\partial \tau}$$

$$x \in [a, b], y \in [c, d] \quad \forall \tau \geq 0$$

le seguenti condizioni al contorno:

- Condizioni al contorno di Dirichlet:

$$U(a, y, \tau) = \Phi_a(y, \tau) \quad x \in [a, b], \forall \tau \geq 0$$

$$U(b, y, \tau) = \Phi_b(y, \tau) \quad x \in [a, b], \forall \tau \geq 0$$

- Condizioni al contorno di Neumann:

$$-\frac{\partial U(x, c, \tau)}{\partial y} = v_c(x, \tau), \quad \frac{\partial U(x, d, \tau)}{\partial y} = v_d(x, \tau), \quad x \in [a, b], \tau \geq 0$$

- Condizioni iniziali:

$$U(x, y, 0) = \psi(x, y) \quad (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$$

Si ponga  $U(x_i, y_j, t_k) = u_{ij}^k$  e  $F(x_i, y_j, t_k) = f_{ij}^k$  e si consideri la mesh:

$$x_i = a + ih_x, \quad i = 0, 1, \dots, n_1 + 1$$

$$y_j = c + jh_y, \quad j = 1, \dots, n_2$$

Dove  $h_x = \frac{b-a}{n_1+1}$ ,  $h_y = \frac{d-c}{n_2-1}$  rappresentano il passo nello spazio lungo le due direzioni e

$h_\tau = \frac{T}{m}$  il passo nel tempo.

Utilizzando il metodo alle differenze finite all'indietro per  $k = 1, \dots, m$  si ottiene la seguente equazione lineare:

$$\frac{u_{ij}^k - u_{ij}^{k-1}}{h_\tau} = \alpha \left( \frac{u_{i-1,j}^k - 2u_{ij}^k + u_{i+1,j}^k}{h_x^2} + \frac{u_{i,j-1}^k - 2u_{ij}^k + u_{i,j+1}^k}{h_y^2} \right) + f_{ij}^k$$

Ponendo  $h_x^2 = h_y^2 = h^2$  possiamo riscrivere l'equazione come:

$$-u_{i-1,j}^k - u_{i,j-1}^k + \left( \frac{1}{\alpha} \frac{h^2}{h_\tau} + 4 \right) u_{ij}^k - u_{i+1,j}^k - u_{i,j+1}^k = \frac{1}{\alpha} \frac{h^2}{h_\tau} u_{ij}^{k-1} + \alpha h^2 f_{ij}^k$$

Sostituendo  $k = \frac{1}{\alpha} \frac{h^2}{h_\tau}$  e  $\tilde{f}_{ij} = \alpha h^2 f_{ij}^k$

$$-u_{i-1,j}^k - u_{i,j-1}^k + (k + 4)u_{ij}^k - u_{i+1,j}^k - u_{i,j+1}^k = k u_{ij}^{k-1} + \tilde{f}_{ij}$$

Valida per  $i = 0, 1, \dots, n_1 + 1$  e  $j = 2, \dots, n_2 + 1$ .

Per  $j = 1$  e  $j = n_2$  bisogna imporre le condizioni al contorno di Neumann esprimibili attraverso le seguenti equazioni, ottenute con un'approssimazione del secondo ordine delle equazioni indicate precedentemente

- $3u_{i,1}^k - 4u_{i,2}^k + u_{i,3}^k = \tilde{v}_{ik}^c$
- $u_{i,n_2-2}^k - 4u_{i,n_2-1}^k + 3u_{i,n_2}^k = \tilde{v}_{ik}^d$

Per  $i = 1, \dots, n_1$ , con  $\tilde{v}_{ik}^c = 2h v_c(x_i, \tau_k)$  e  $\tilde{v}_{ik}^d = 2h v_d(x_i, \tau_k)$

Si può dunque scrivere il seguente sistema penta diagonale

$$\begin{cases} T u_1^k - J u_2^k = \tilde{b}_1^k \\ -J u_{i-1}^k + T u_i^k - J u_{i+1}^k = \tilde{b}_i^k \\ -J u_{n_1-1}^k + T u_{n_1}^k = \tilde{b}_{n_1}^k \end{cases} \quad i = 2, \dots, n_1 - 1$$

Per  $k = 1, \dots, m$



$$T = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & & & & \\ -1 & k+4 & -1 & & & & \\ & -1 & k+4 & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & -1 & & \\ & & & -1 & k+4 & -1 & \\ & & & 1 & -4 & 3 & \end{bmatrix}, \quad u_i^k = \begin{bmatrix} u_{i,1}^k \\ u_{i,2}^k \\ \vdots \\ u_{i,n_2}^k \end{bmatrix}, J = \text{diag}(0,1, \dots, 1,0)$$

Con la terna destra di vettori:

$$b_i^k = \begin{bmatrix} 0 \\ ku_{i2}^{k-1} \\ \vdots \\ ku_{i,n_2-1}^{k-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{f}_{i2} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{i,n_2-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{v}_{ik}^c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tilde{v}_{ik}^d \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, n_1$$

Oppure semplicemente:

$$b_i^k = \begin{bmatrix} \tilde{v}_{ik}^c \\ ku_{i2}^{k-1} + \tilde{f}_{i2} \\ \vdots \\ ku_{i,n_2-1}^{k-1} + \tilde{f}_{i,n_2-1} \\ \tilde{v}_{ik}^d \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, n_1$$

$$E \tilde{b}_1^k = b_1^k + Ju_0^k, \quad \tilde{b}_{n_1}^k = b_{n_1}^k + Ju_{n_1+1}^k.$$

In forma matriciale si può scrivere:

$$Au^k = b^k, \quad k = 1, \dots, m,$$

con

$$A = \begin{bmatrix} T & -J & & & \\ -J & T & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -J & \\ & & & -J & T \end{bmatrix}, \quad u^k = \begin{bmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_{n_1}^k \end{bmatrix}, \quad b^k = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1^k \\ b_2^k \\ \vdots \\ \tilde{b}_{n_1}^k \end{bmatrix},$$

dove  $u_i^k, b_i^k \in \mathbb{R}^{n_2}$  e  $u^k, b^k \in \mathbb{R}^{n_2 n_1}$ .

## 4.2 Modellizzazione su Matlab®

Dopo una prima trattazione matematica, è stato implementato su Matlab® un modello bidimensionale in grado di stimare la diffusività termica di un materiale omogeneo, uniforme e isotropo sottoposto ad un gradiente termico. Il modello sviluppato consiste in una procedura iterativa basata sulla risoluzione dell'equazione di Fourier con il metodo delle differenze finite; utilizzando i dati ottenuti sperimentalmente il modello riesce a simulare il fenomeno conduttivo e a determinare il valore di  $\alpha$ . Per la risoluzione dell'equazione di Fourier devono essere forniti:

- **CONDIZIONI AL CONTORNO:**
  1. *CONDIZIONI DI DIRICHLET*: imposizione dei dati sperimentali di temperatura ottenuta mediante il dispositivo di misura a celle di Peltier
  2. *CONDIZIONI DI VON NEUMANN*: imposizioni di flussi nulli sulla frontiera del dominio.
- **CONDIZIONI INIZIALI**: dato sperimentale relativo alle condizioni iniziali di temperatura
- **GEOMETRIA DEL PROVINO**

Inoltre è necessario fornire il dato sperimentale relativo all'andamento nel tempo della temperatura in un punto ausiliario  $P(x_0, y_0)$  per poter definire una funzione errore

A grandi linee si può riassumere la logica alla base del modello sviluppato come segue. Alla prima iterazione il risolutore riceve in input i dati sperimentali relativi alle condizioni al contorno, alle condizioni termiche iniziali, alla geometria del provino e alla misura ausiliaria di temperatura. Fornendo un valore iniziale di diffusività termica il modello discretizzando il tempo e lo spazio crea una mesh e applica il metodo delle differenze finite all'indietro per risolvere l'equazione di Fourier. Viene dunque determinato l'andamento temporale della temperatura in corrispondenza di un punto; questo risultato viene confrontato con i dati

sperimentali al fine di creare una funzione errore. La funzione errore viene minimizzata con un algoritmo di ottimizzazione che provvede ad aggiornare il valore della diffusività termica alla fine di ogni ciclo.

La funzione errore o obiettivo è determinata confrontando l'andamento temporale della temperatura calcolata in un punto  $T_{CALCOLATA}(x_0, y_0, \tau)$  con quella ottenuta sperimentalmente  $T_{EXP}(x_0, y_0, \tau)$ .

$$FUNZIONE\ OBIETTIVO = \left\| \frac{T_{EXP}(x_0, y_0, \tau) - T_{CALCOLATA}(x_0, y_0, \tau)}{n} \right\|$$

Con n numeri punti nel tempo.

Una descrizione più precisa e dettagliata del funzionamento del modello è stato riportato nella figura qui di seguito. In verde è evidenziata la simulazione effettuata dal modello, in blu l'algoritmo di ottimizzazione.

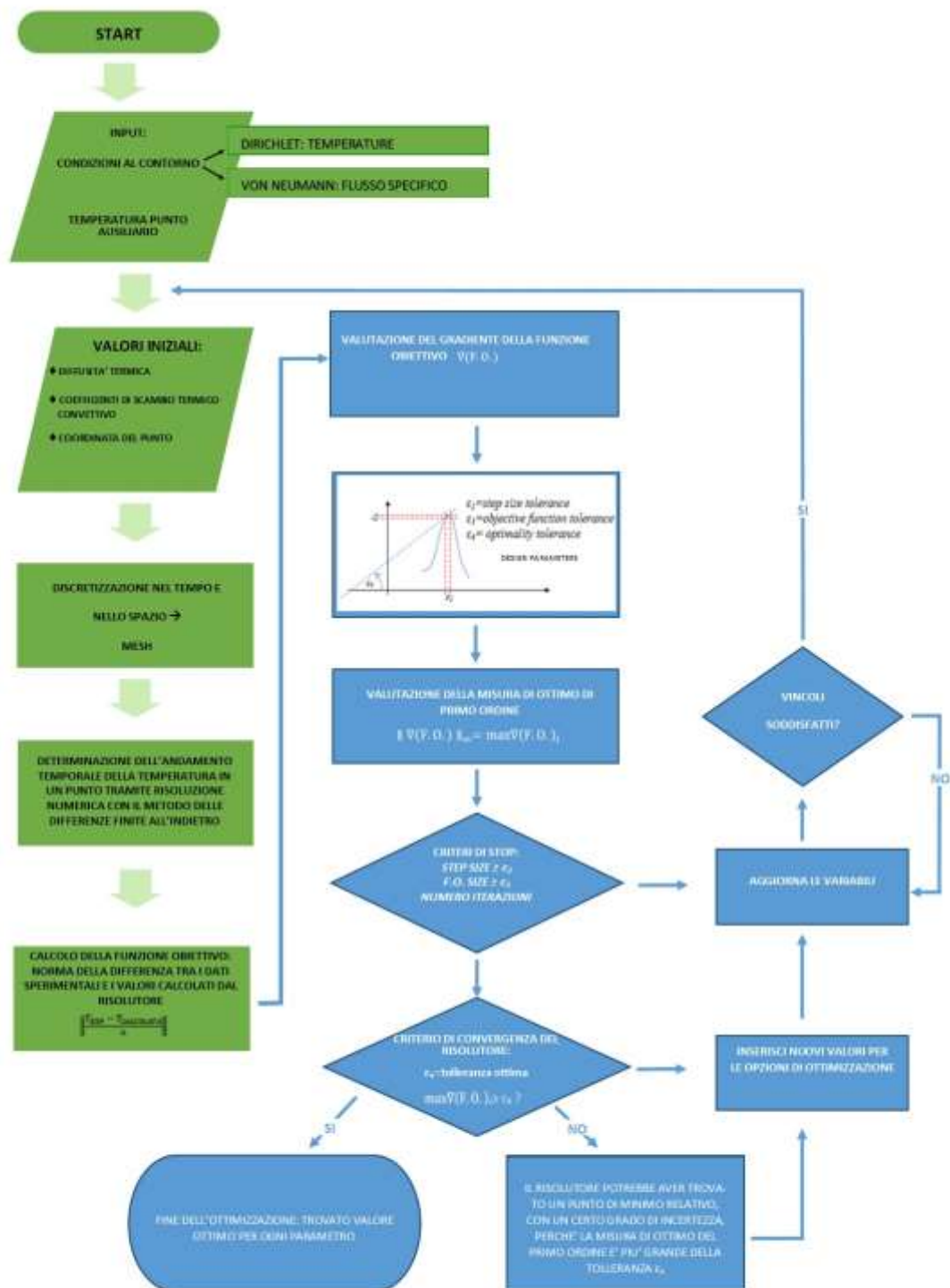


Figura 4.3 – schema di ottimizzazione

Come si evince dalla figura 4.3 il procedimento di ottimizzazione non coinvolge solo la diffusività termica. Dopo un primo test del modello ci si è resi conto della necessità di introdurre nel processo di ottimizzazione anche altre variabili che influenzano la correttezza della soluzione ottenuta. Le variabili ottimizzate sono:

1. Coefficienti di scambio termico convettivo  $h_{c,1}, h_{c,2}$  dei bordi laterali del provino. Non riuscendo a ricreare condizioni di perfetta adiabaticità i flussi attraverso i bordi laterali del provino (paralleli alla direzione del flusso) non sono nulli. Il flusso di calore  $v(x, y, t)$  scambiato lungo un bordo con l'ambiente esterno può essere espresso come:

$$v(x, y, t) = h_c \cdot (T(x, y, t) - T_{\text{ambiente}})$$

dove  $h_c$  è il coefficiente di scambio termico convettivo.

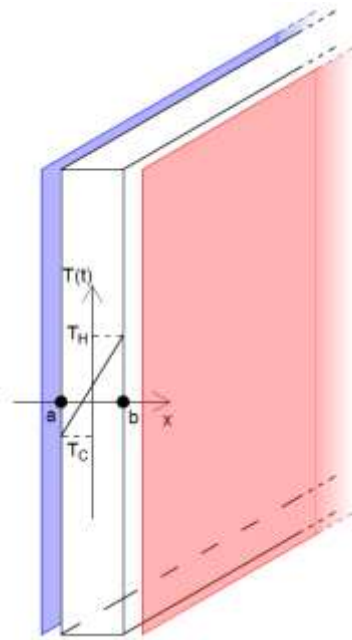


Figura 4.4 Andamento della temperatura sul bordo del provino

Ipotizzando che in ogni istante il gradiente della temperatura lungo il bordo abbia un andamento lineare come mostrato in figura 4.4, essendo note le temperatura agli estremi (*condizioni al contorno di Dirichlet*), è possibile determinare per ogni istante l'andamento della temperatura lungo i lati del provino ovvero  $T(x, c, t)$  e  $T(x, d, t)$ .

2. Posizione della coordinata del punto di misura  $x_0$ . Come già descritto alla fine di ogni ciclo il programma confronta l'andamento temporale della temperatura misurata con quella calcolata in un determinato punto. Avendo a che fare con provini di spessore molto ridotto, uno scostamento di pochi decimi di millimetro lungo il bordo equivale ad una sensibile variazione di temperatura; per questo motivo è fondamentale determinare la reale coordinata geometrica del punto di misura  $P(x_0, c)$ .

### 3. Numero di punti nel tempo $n$

Nel problema esaminato non è presente alcuna fonte di generazione di calore all'interno del materiale. Tuttavia per verificare la solidità e la coerenza del modello è stato necessario considerare in un primo momento la presenza di generazione interna  $F(x, y, t)$ . Prima dell'applicazione al caso reale infatti, il modello è stato testato generando un esperimento virtuale a partire da una soluzione nota dell'equazione di Fourier e facendo risolvere al programma il problema diretto della conduzione del calore.

Scelta arbitrariamente una distribuzione delle temperature  $U(x, y, t)$  sono state calcolate le derivate seconde nello spazio  $\frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial y^2}$  e la derivata temporale  $\frac{\partial U(x, y, t)}{\partial t}$ . Fissando un valore di  $\alpha$  è stato possibile determinare il termine di generazione interna  $F(x, y, t)$  dall'equazione:

$$\left( \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial t} + F(x, y, t)$$

Questi valori rappresentano i dati relativi all'"esperimento virtuale".

Una volta determinate le condizioni al contorno, le condizioni iniziali, la generazione interna ed il valore di diffusività termica è stato infatti utilizzato il modello per risolvere l'equazione di Fourier. La distribuzione spazio-temporale determinata dal modello è risultata coerente con la soluzione nota  $U(x, y, t)$ .

### 4.2.1 Programma di ottimizzazione

Il modello di ottimizzazione utilizzato lavora nella piattaforma MATLAB® e rappresenta un metodo di risoluzione per problemi di programmazione non lineare in cui la funzione obiettivo e i vincoli sono funzioni non lineari di determinate variabili.

Per trovare la soluzione ottima che minimizza la funzione obiettivo viene utilizzato il metodo di programmazione sequenziale quadratico in Nocedal and Wright. In particolare l'algoritmo che sceglie in quale direzione ricercare i valori ottimi, consiste in una procedura iterativa: dal momento che risolvere problemi di programmazione non lineare è molto complicato, la strategia adottata è quella di trasformare il problema non lineare in una sequenza iterativa di sotto-problemi più semplici ognuno dei quali può essere risolto come problema lineare.

Nelle righe seguenti viene descritto a grandi linee come il programma di ottimizzazione riconosce di aver raggiunto la convergenza e determina l'accuratezza attribuibile al risultato ottenuto.

L'algoritmo seleziona la direzione in cui cercare un miglioramento della funzione obiettivo. Per ogni iterazione il risolutore aggiorna le variabili scegliendo i relativi valori all'interno di range che soddisfano i vincoli con tolleranza  $\varepsilon_1$ . Indicando con  $\psi \leq 0$  le funzioni vincolanti, la tolleranza  $\varepsilon_1$  rappresenta il valore limite massimo della funzione vincolante per la quale l'espressione analitica della funzione vincolante sono numericamente soddisfatte anche quando  $\psi \leq \varepsilon_1$ .

Queste espressioni sono meno stringenti delle funzioni vincolanti analitiche  $\psi \leq 0$  e ne rappresentano un'approssimazione numerica.

Se il risolutore seleziona un punto, all'interno del range di valori indicato, tale per cui  $\psi \leq \varepsilon_1$  allora il risolutore riconosce che le funzioni vincolanti non sono state rispettate.

*CRITERI DI STOP:*

- $\varepsilon_2$  (step size tolerance) dipende dai parametri dell'ottimizzazione ed è un limite inferiore sull'ampiezza dello step, ovvero l'ampiezza del cambiamento spaziale in cui la variabile viene valutata. Se il risolutore prova ad usare una grandezza dello step minore della tolleranza  $\varepsilon_2$  l'iterazione si blocca.
- $\varepsilon_3$  (objective function tolerance) rappresenta il limite inferiore della variazione del valore della funzione obiettivo che può avvenire con uno step. Se il valore della funzione obiettivo varia di una quantità inferiore a  $\varepsilon_3$  l'iterazione si blocca.

Se i vincoli sono rispettati entro la tolleranza  $\varepsilon_1$ , l'accuratezza della soluzione trovata alla fine delle iterazioni viene valutata con la first-order optimality measure. E' una misura del gradiente della funzione obiettivo e corrisponde a  $norm(\nabla(f.o.))_\infty = \max_i \nabla(f.o.)_i$ . Il suo valore dovrebbe essere nullo in corrispondenza del valore ottimo delle variabili trovato  $norm(\nabla(f.o.))_\infty = 0$ . In realtà il risolutore considera numericamente soddisfatta questa condizione anche entro una certa tolleranza  $\varepsilon_4$ .

Se non è uguale a zero ma minore di  $norm(\nabla(f.o.))_\infty \leq \varepsilon_4$  in corrispondenza di una soluzione nelle vicinanze dei parametri ottimali, queste vengono considerate un'approssimazione numerica dell'espressione analitica di  $norm(\nabla(f.o.))_\infty = 0$ .

L'accuratezza del risultato ottenuto è correlata ai valori di tolleranza imposti:

- Constraint tolerance value  $\varepsilon_1 = 10^{-4}$
- Step size tolerance  $\varepsilon_2 = 10^{-3}$
- Objective function tolerance  $\varepsilon_3 = 10^{-7}$
- Optimality tolerance  $\varepsilon_4 = 10^{-6}$



## CAPITOLO 5

# PROVE SPERIMENTALI E RISULTATI

Le prove sperimentali sono state realizzate con l'utilizzo di un misuratore di conducibilità termica a celle di Peltier. Il misuratore, descritto nel capitolo precedente, è stato realizzato secondo le norme ISO 8301 e UNI-EN 12667, ed è costituito da due unità termiche ad effetto Peltier che creano e mantengono all'interno del provino un flusso di calore costante, uniforme e unidirezionale, misurato da due termoflussimetri.

### 5.1 Prove sperimentali per la conducibilità termica

Oltre alle prove sperimentali necessarie per la determinazione della diffusività termica sono state condotte delle prove sperimentali per determinare la conducibilità termica di alcuni provini presenti nel laboratorio. La conducibilità termica è infatti un parametro fondamentale nella caratterizzazione termica dei materiali; inoltre negli sviluppi futuri del modello proposto si prevede l'utilizzo dei flussi specifici di calore (attualmente già misurati) come parametro per la determinazione della funzione errore in sostituzione. Per poter utilizzare questa informazione è necessario che il risolutore determini un valore di flusso secondo il postulato di Fourier:  $q = -\frac{\lambda}{s} \Delta T$  e dunque è necessaria la conoscenza della conducibilità termica.

Prima dell'avvio di ogni prova si è provveduto alla preparazione dei provini. Sono state misurate altezza, lunghezza, spessore ed il peso di ogni provino al fine di stabilirne la densità. I materiali sottoposti alle misurazioni sono: PMMA, fibrocemento, polistirene espanso e sughero. Le superfici a contatto con le unità termiche devono essere il più possibile levigate e complanari, in modo da non avere variazioni di sezione e garantire un contatto sempre uniforme con le piastre; prima di ogni prova viene comunque applicato un sottile strato di pasta termica sulle due superfici per eliminare eventuali bolle d'aria e migliorare il contatto termico. Una volta introdotto il provino all'interno del misuratore vengono impostati i set-

point di temperatura e le costanti di controllo PID mediante il software implementato su Labview. Per ogni materiale è stato necessario individuare le costanti di controllo PID delle celle Peltier, seguendo le indicazioni fornite dal costruttore, in modo da mantenere un andamento delle temperature il più possibile costante sulle superfici dei provini in contatto con le unità termiche. In figura viene mostrato il pannello frontale del software di controllo. Si possono vedere le barre con indicata la potenza fornita dalle celle, i SET POINT di temperatura, le temperature rilevate dalle termoresistenze sulla piastra di conduzione.



Figura 5.1 – Pannello frontale in LabVIEW

Tramite il software LabVIEW sono stati acquisiti tutti i dati relativi a:

- temperature superficiali sui lati del provino a contatto con le unità termiche, misurate mediante termocoppie di tipo T inserite nelle piastre termoflussimetriche
- temperature misurate tramite termoresistenze alloggiata nella piastra di conduzione interposta tra unità termiche e termoflussimetri (temperature utilizzate per il controllo)
- flussi specifici attraverso le facce del provino a contatto con le unità termiche, mediante termoflussimetri

L'elaborazione dei dati è stata successivamente effettuata con un foglio di calcolo Excel. Dev'essere precisato che nella misura della differenza di temperatura tra le facce del provino, la norma raccomanda una connessione differenziale tra le termocoppie a contatto con la superficie calda del provino e quelle a contatto con la superficie fredda in modo da permettere il rilievo diretto della differenza di temperatura. Tuttavia per come è stato

creato, il programma per la stima della diffusività termica richiede in input i dati di temperatura su ogni faccia; per questo motivo non è stata utilizzata una connessione differenziale delle termocoppie ma si è proceduto alla misura della temperatura su entrambe le superfici in maniera indipendente.

La norma UNI 7891 *“Determinazione della conduttività termica con il metodo dei termoflussimetri”* al punto 9.8 asserisce: Quando si ritiene raggiunto il regime stazionario, si deve continuare la prova eseguendo, ad intervalli di tempo non minori di 15 min, le misure atte a determinare le temperature  $t_1$  e  $t_2$  e la forza elettromotrice  $E$ . Il regime stazionario si intende raggiunto quando almeno otto serie successive delle suddette misure diano valori della conduttività termica che differiscano tra di loro meno dell'1,5%. La determinazione del valore della conduttività termica  $\lambda$  è effettuata applicando la legge di Fourier:

$$\lambda = \frac{Q}{(T_{HOT} - T_{COLD}) s}$$

Raggiunto il regime stazionario, per ogni secondo campionato viene calcolato il  $\Delta T$  a cavallo delle due superfici del provino e il valore del flusso specifico come media dei valori misurati sui due lati. Una volta calcolata la conducibilità termica per ogni secondo, il valore finale viene ottenuto facendo la media di questi.

Si riportano di seguito i grafici rappresentativi dell'evoluzione temporale delle temperature e dei flussi di calore specifici misurati e i relativi risultati in termini di conducibilità termica dei materiali:

- FIBROCEMENTO
- POLISTIRENE ESTRUSO
- SUGHERO
- POLIMETILMETACRILATO (PMMA O PLEXIGLASS)

## Fibrocemento



MATERIALE	PESO (g)	SPESSORE (m)	VOLUME (m <sup>3</sup> )	DENSITA' (g/cm <sup>3</sup> )
FIBROCEMENTO	247,016	0,121	0,000465	0,5315

Tabella 5.1 – caratteristiche

Si riportano gli andamenti temporali delle temperature (fig. 5.2) e dei flussi specifici (fig. 5.3) misurati sulle due facce opposte del provino elaborati con foglio di calcolo Excel:

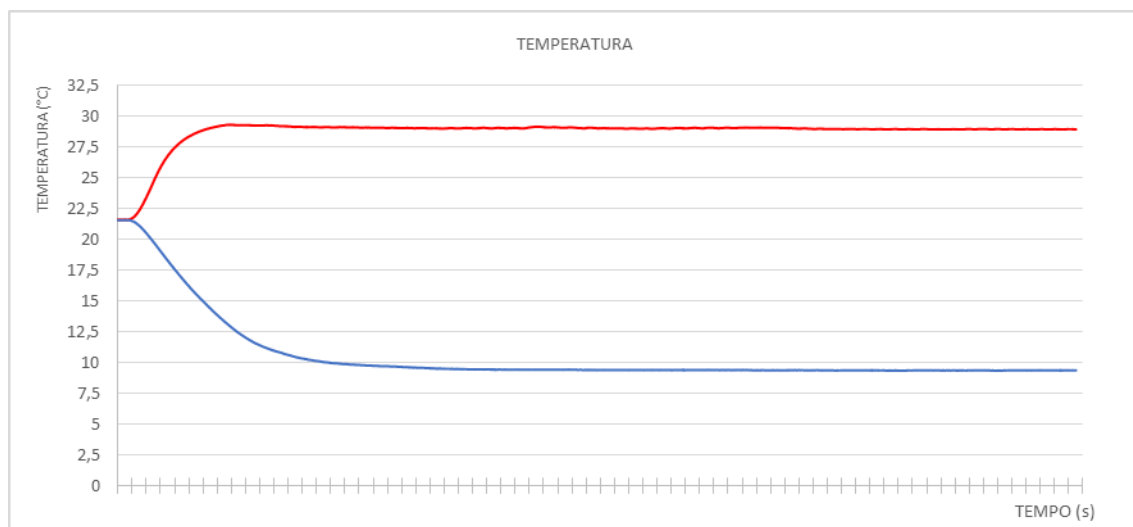


Figura 5.2 – temperatura

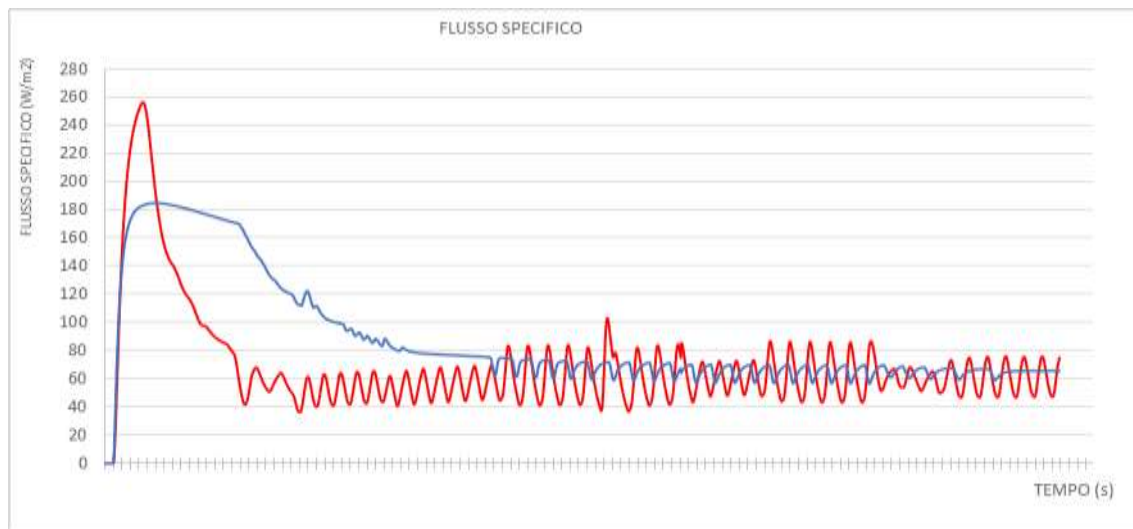


Figura 5.3 – flusso specifico

Nella figura 5.4 viene mostrato l'andamento della conducibilità ottenuta durante il regime stazionario

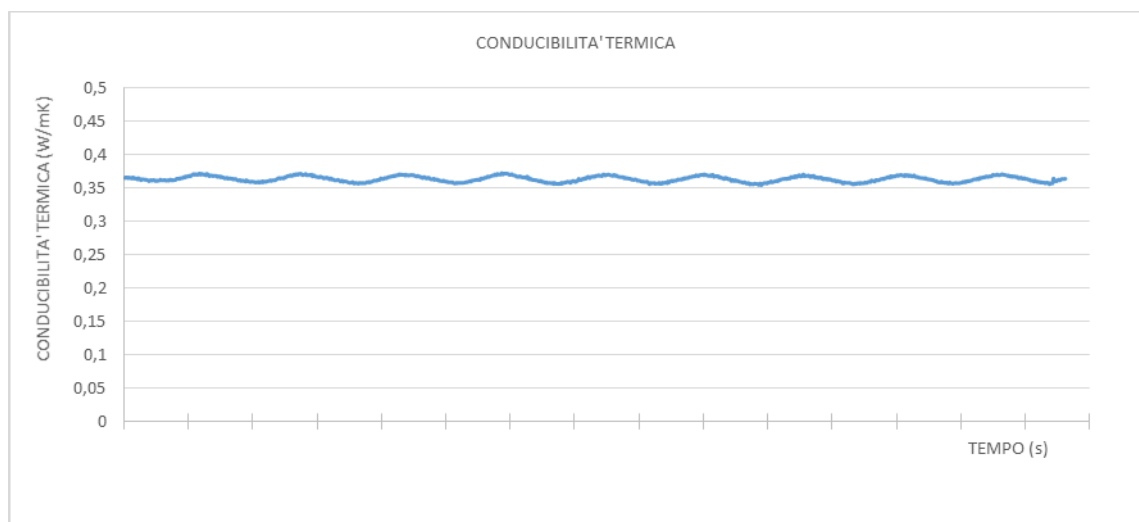


Figura 5.4 – conducibilità termica

Con i dati sperimentali rilevati il valore medio di conducibilità termica ottenuto per il provino di fibrocemento è di  $\lambda = 0,36 \frac{W}{mK}$

### Polistirene estruso



MATERIALE	PESO (g)	SPESSORE (m)	VOLUME (m <sup>3</sup> )	DENSITA' (g/cm <sup>3</sup> )
EPS	52,475	0,0585	0,00163	0,0322

Tabella 5.2 – caratteristiche

Si riportano gli andamenti temporali delle temperature (fig. 5.5) e dei flussi specifici (fig. 5.6) misurati sulle due facce opposte del provino elaborati con foglio di calcolo Excel:

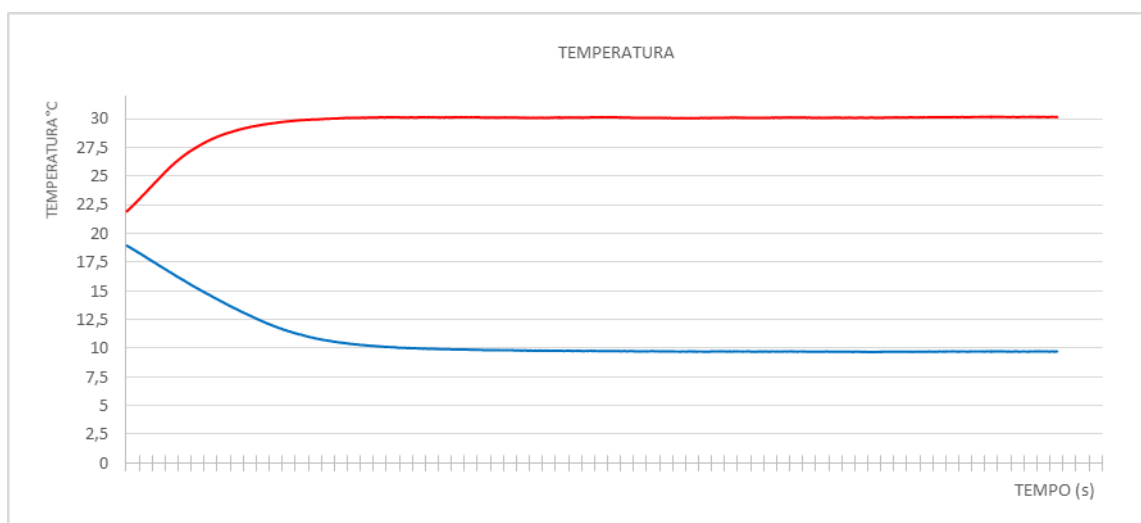


Figura 5.5 – temperatura

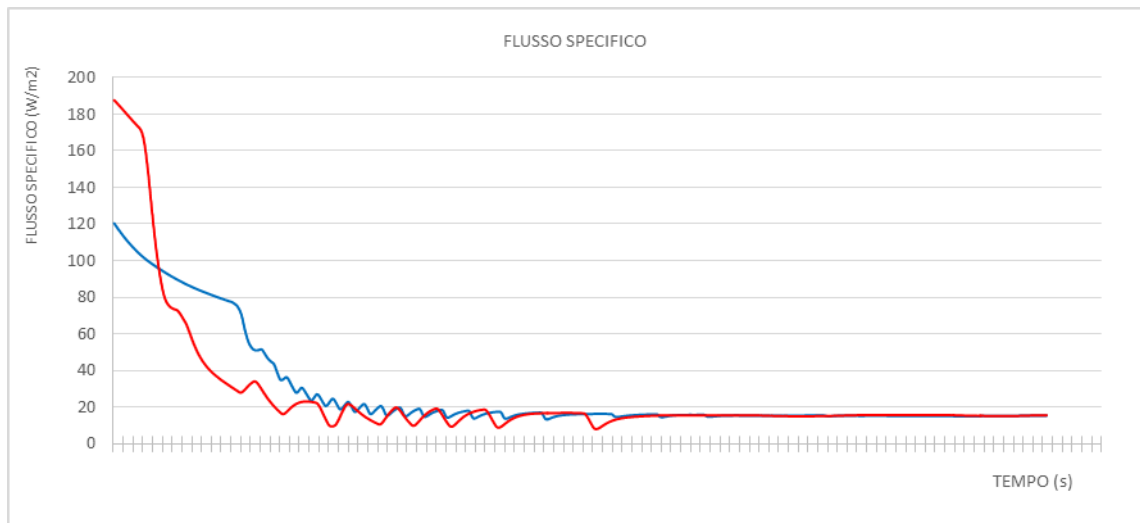


Figura 5.6 – flusso specifico

La figura 5.7 mostra l'andamento della conducibilità ottenuta durante il regime stazionario

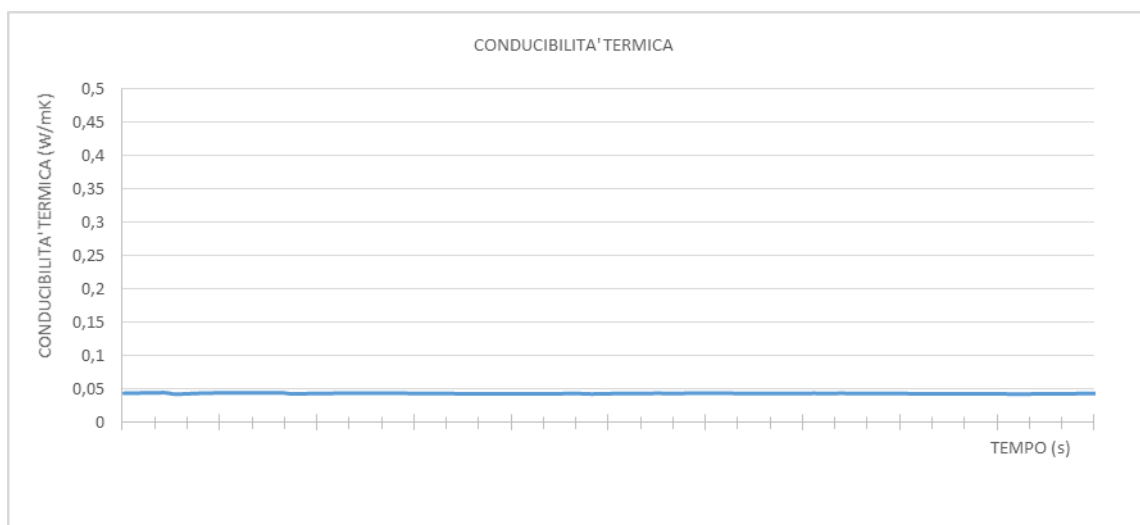


Figura 5.7 – conducibilità termica

Con i dati sperimentali rilevati il valore medio di conducibilità ottenuto per il provino di polistirene espanso è di  $\lambda = 0,0438 \frac{W}{mK}$

## SUGHERO



MATERIALE	PESO (g)	SPESSORE (m)	VOLUME (m <sup>3</sup> )	DENSITA' (g/cm <sup>3</sup> )
SUGHERO	51,875	0,0058	0,000161	0,3214

Tabella 5.3– caratteristiche

Si riportano gli andamenti temporali delle temperature (fig. 5.8) e dei flussi specifici (fig. 5.9) misurati sulle due facce opposte del provino elaborati con foglio di calcolo Excel:

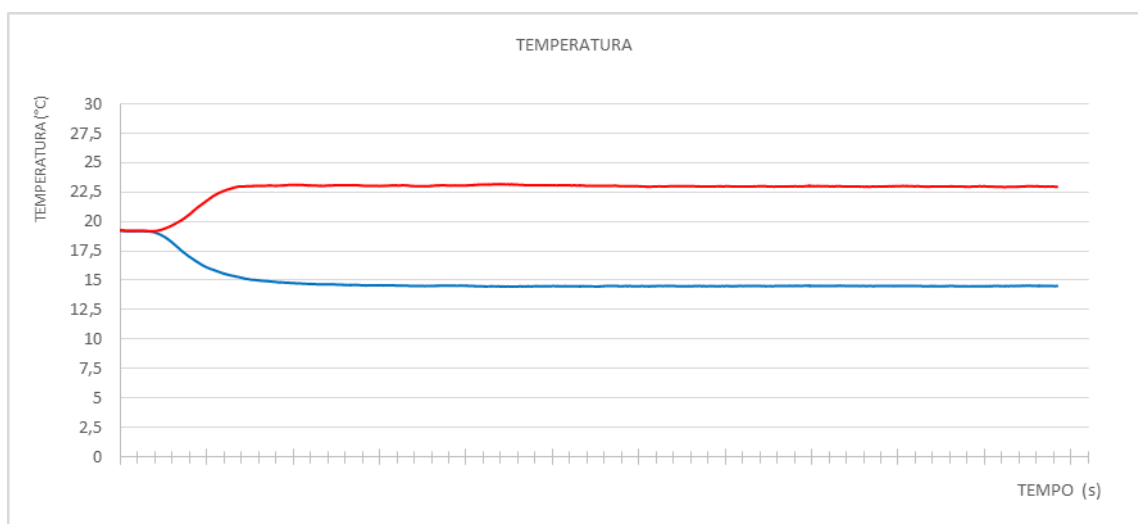


Figura 5.8 – temperatura



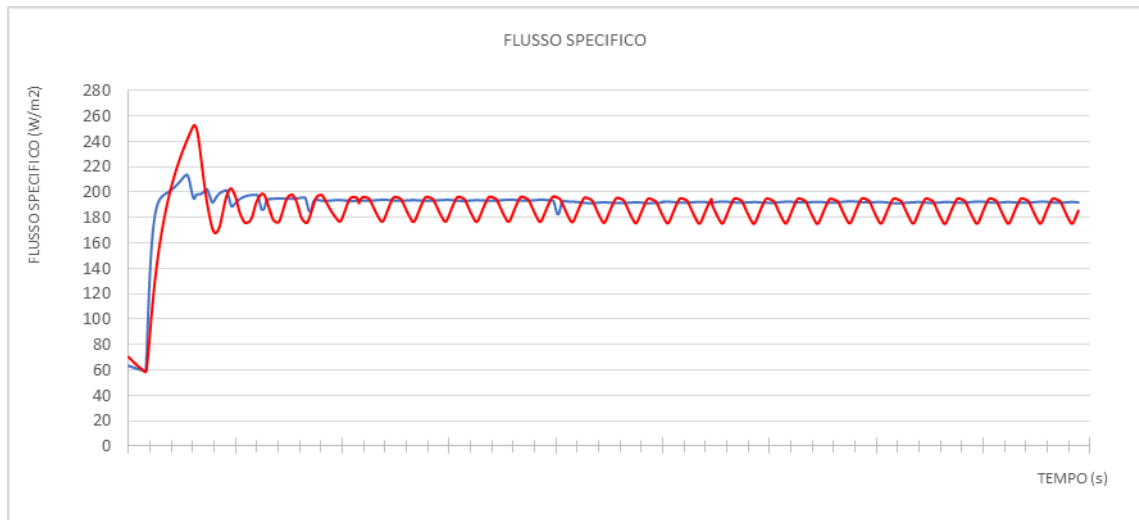


Figura 5.9 – flusso specifico

La figura 5.10 mostra l'andamento della conducibilità ottenuta durante il regime stazionario

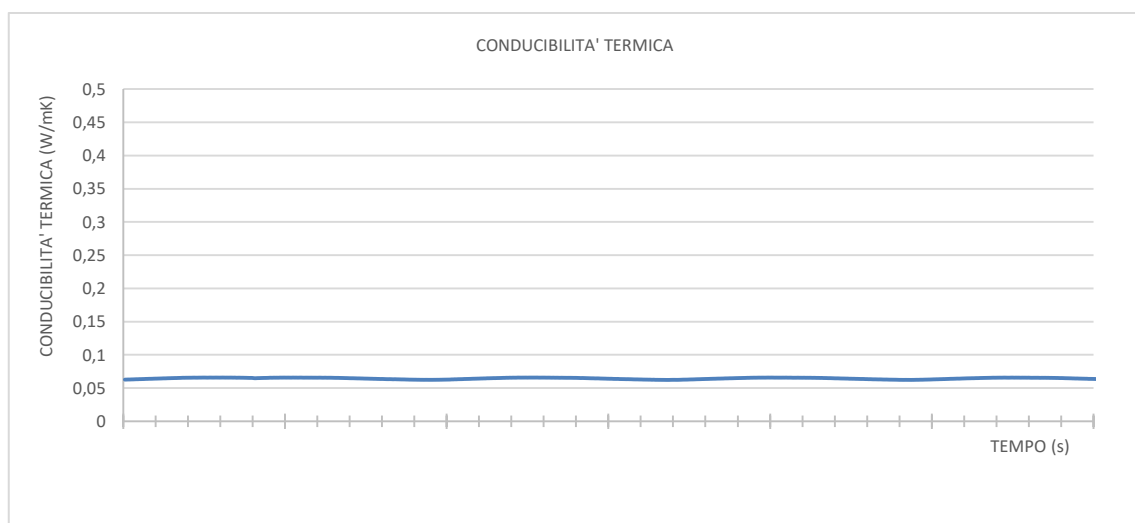


Figura 5.10 – conducibilità termica

Con i dati sperimentali rilevati il valore medio di conducibilità ottenuto per il provino di sughero è di  $\lambda = 0,0643 \frac{W}{mK}$

## POLIMETILMETACRILATO (PMMA o Plexiglass)



MATERIALE	PESO (g)	SPESSORE (m)	VOLUME (m <sup>3</sup> )	DENSITA' (g/cm <sup>3</sup> )
PMMA	544	0,121	0,000465	1,1705

Tabella 5.4 – Caratteristiche

Si riportano gli andamenti temporali (fig. 5.11) delle temperature e dei flussi specifici (fig. 5.12) misurati sulle due facce opposte del provino elaborati con foglio di calcolo Excel:

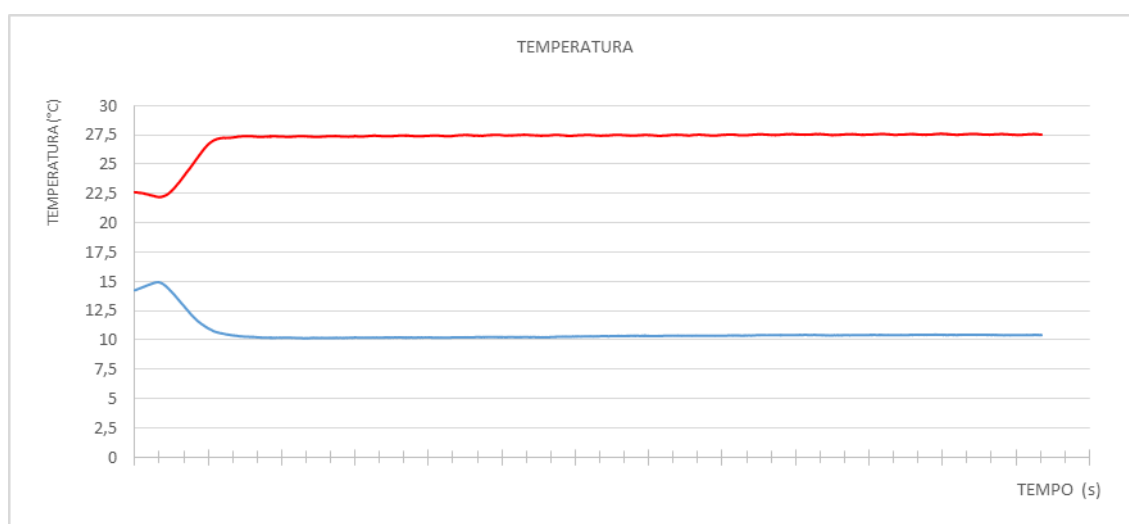


Figura 5.11 – temperatura

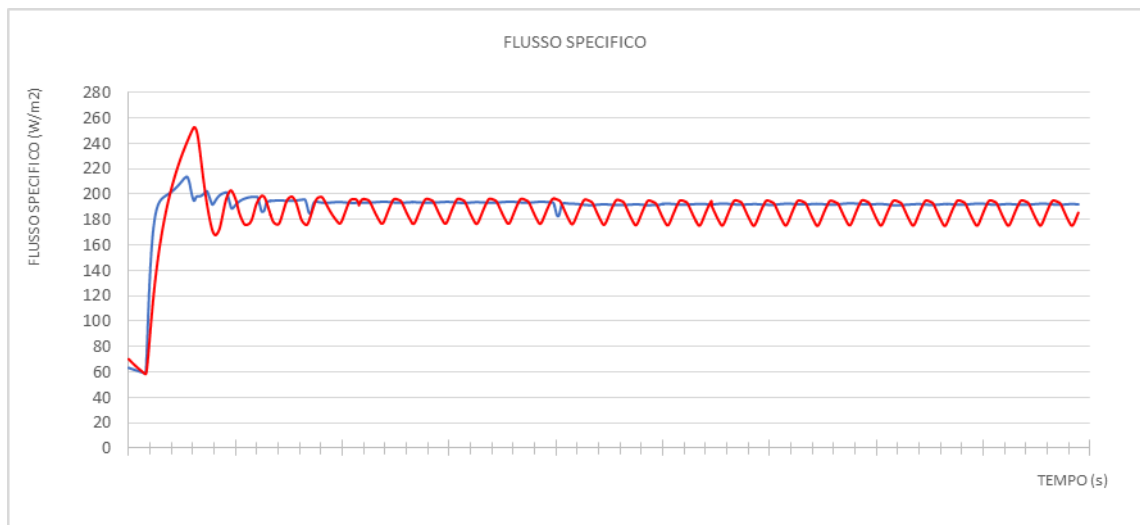


Figura 5.12 – flusso specifico

Nella figura 5.13 viene mostrato l'andamento della conducibilità ottenuta durante il regime stazionario

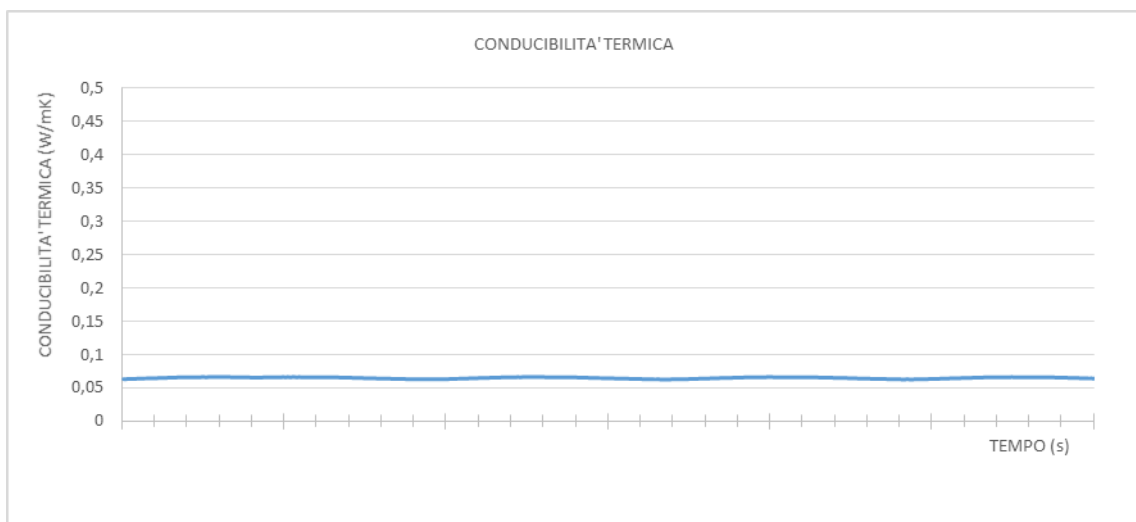


Figura 5.13 – conducibilità termica

Con i dati sperimentali rilevati il valore medio di conducibilità ottenuto per il provino di PMMA è di  $\lambda = 0,1949 \frac{W}{mK}$

## 5.2 Prove sperimentali per la diffusività termica

Come descritto precedentemente prima di effettuare le prove sperimentali si è provveduto alla preparazione del provino. In questo caso l'unico materiale sottoposto al test è un campione di polimetilmetacrilato (PMMA o Plexiglass). Non avendo a disposizione un macchinario certificato per la misura della diffusività termica è stato necessario utilizzare un materiale di cui fosse noto in letteratura questo parametro, così da avere un valore di confronto e poter stabilire la bontà della stima fatta dal modello; la scelta è ricaduta sul plexiglass in quanto tutti i dati reperiti convergono su un valore di diffusività termica intorno a  $\alpha = 0,11 \frac{mm^2}{s}$ .

In maniera analoga alle prove condotte per la determinazione della conducibilità termica, prima di eseguire le misurazioni si è provveduto alla taratura delle termocoppie, alla valutazione delle dimensioni geometriche e del peso ed all'applicazione di uno strato di pasta termica sulle due facce del provino a contatto con le unità termiche. Dopodiché il provino è stato inserito nel dispositivo.

MATERIALE	PESO (g)	SPESSORE (m)	VOLUME (m <sup>3</sup> )	DENSITA' (g/cm <sup>3</sup> )
PMMA	544	0,121	0,000465	1,170494

Tabella 5.5 – Caratteristiche

Come set-point per le temperature sono state imposte  $T = 30^{\circ}C$  all'unità termica di riscaldamento e  $T = 10^{\circ}C$  all'unità termica di raffreddamento. Note le costanti di controllo PID, sempre tramite il software LabVIEW sono state messe in funzione le celle e registrati i dati relativi a:

- temperature superficiali delle due facce a contatto con le unità termiche, misurate mediante termocoppie di tipo T inserite nelle piastre dei termo-flussimetri
- temperatura superficiale in un punto giacente su una faccia del provino parallela alla direzione del flusso di calore, misurata tramite termocoppie di tipo K

- temperature misurate tramite termoresistenze alloggiata nella piastra di conduzione interposta tra unità termiche e termoflussimetri (temperature utilizzate per il controllo)
- flussi specifici attraverso le facce del provino a contatto con le unità termiche, mediante termoflussimetri

La prova ha avuto una durata di: **1316 s**. Una prima elaborazione grafica dei dati è stata effettuata anche in questo caso con un foglio di calcolo Excel come mostrato nelle figure che seguono.

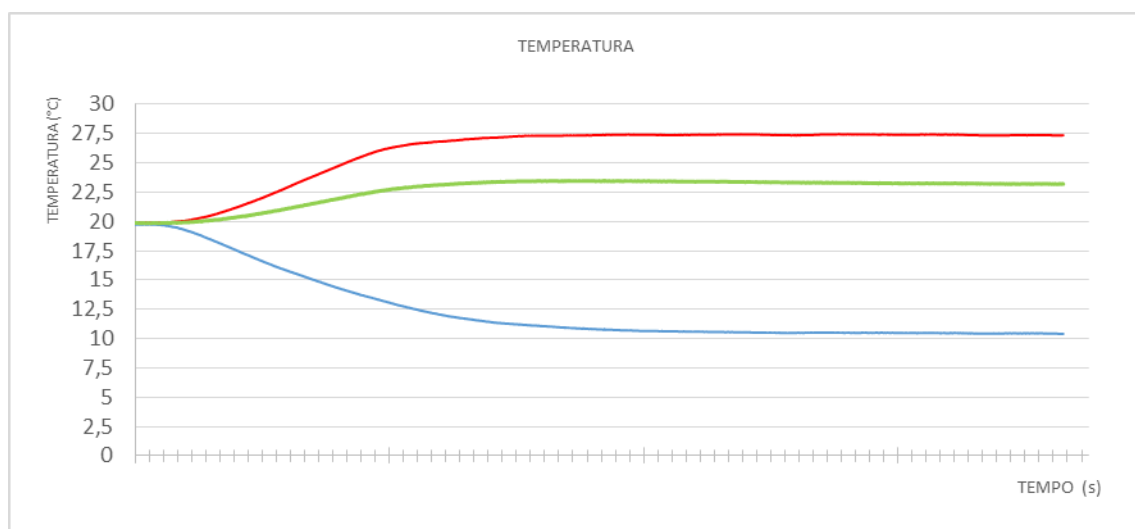


Figura 5.14 – andamento temporale delle temperatura

Nella figura 5.14 in rosso viene riportato l'andamento nel tempo della temperatura sulla faccia sottoposta a riscaldamento mentre in blu vediamo l'andamento della temperatura sulla faccia raffreddata. La curva verde rappresenta l'andamento della temperatura rilevata su un punto di una faccia laterale del provino.

Si può altresì notare come le temperature non raggiungano i set-point imposti; ciò è dovuto al fatto che le sonde con cui le celle effettuano il controllo e le sonde con cui sono rilevate le temperature, come già descritto, si trovano in due posizioni diverse.

Si riportano di seguito (fig. 5.15) anche gli andamenti dei due flussi termici specifici misurati dalle piastre termo-flussimetriche sulla facce del provino a contatto con le unità termiche.

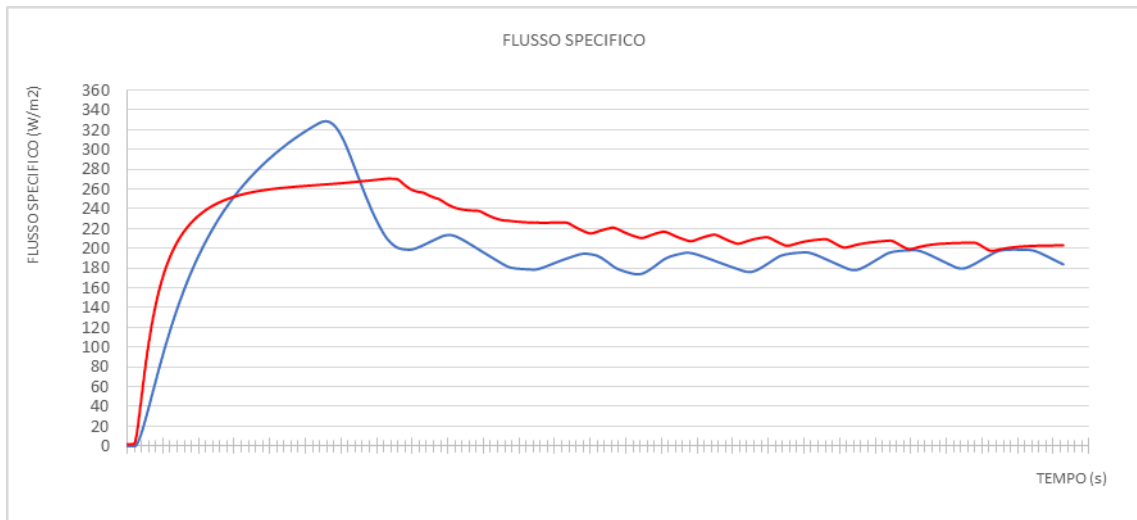


Figura 5.15– flusso specifico

Nella figura 5.15 si può notare un primo intervallo caratterizzato da un costante aumento del valore dei flussi coinvolti; dopodiché i flussi tendono entrambi a diminuire. A differenza delle prove condotte nel paragrafo precedente, in questo caso il periodo di osservazione non è stato protratto fino al raggiungimento di un regime stazionario in quanto il fenomeno d'interesse era proprio il regime transitorio.

### 5.1.1 RISULTATI

I dati raccolti durante la prova sperimentale condotta sul provino di PMMA sono stati utilizzati per la stima della *diffusività termica* del materiale mediante l'utilizzo del modello sviluppato sul software MATLAB® il cui funzionamento è descritto nello schema in figura 4.3.

Nella tabella 5.6 si riportano le caratteristiche del plexiglass di riferimento a  $T=25^{\circ}\text{C}$

Densità ( $\text{g}/\text{cm}^3$ )	Diffusività termica ( $\text{mm}^2/\text{s}$ )	Conducibilità termica ( $\text{W}/\text{mK}$ )
1.188	0.112	0.193

Tabella 5.6

Al risolutore sono stati forniti come dati in input:

- Geometria del provino: essendo il modello sviluppato per il caso bidimensionale, le dimensioni necessarie riguardano lo spessore  $x \in [a, b]$  e la lunghezza  $y \in [c, d]$  del provino come mostrato nella figura 5.16 sottostante:

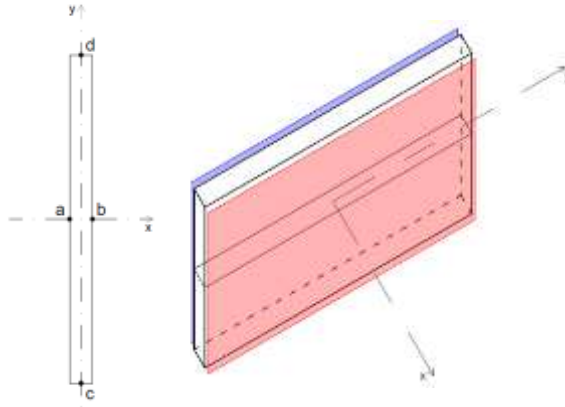


Figura 5.16

- Valore della temperatura del provino all'inizio della prova: *condizioni termiche iniziali di isoterma*:  $T_{\text{INIZIALE}}=19,84^{\circ}\text{C}$
- Valori delle temperature superficiali  $T_{\text{COLD}}$  e  $T_{\text{HOT}}$  nel tempo, rappresentati rispettivamente dalle curve rossa e blu in figura 5.14; vengono dati in input al risolutore sotto forma di due vettori colonna di dimensione **1315x1**. Questi dati rappresentano le *condizioni al contorno di Dirichlet* del problema.
- Valore della temperatura  $T$  misurata sulla faccia parallela alla direzione del flusso di calore, rappresentata dalla curva in verde nella figura 5.14; questo valore viene dato in input sotto forma di vettore colonna, anch'esso di dimensione **1315x1**. Questo è il dato che ad ogni iterazione viene confrontato con la soluzione trovata dal risolutore per verificarne l'errore di calcolo. In base a ciò l'algoritmo di ottimizzazione decide in che direzione ricercare i valori di ottimo ad ogni iterazione.

La figura 5.17 mostra in blu l'andamento reale della temperatura nel punto di misura ausiliario. Le curve tratteggiate vogliono rappresentare l'andamento della temperatura simulata dal programma al variare di  $\alpha$  nei vari cicli dell'iterazione.

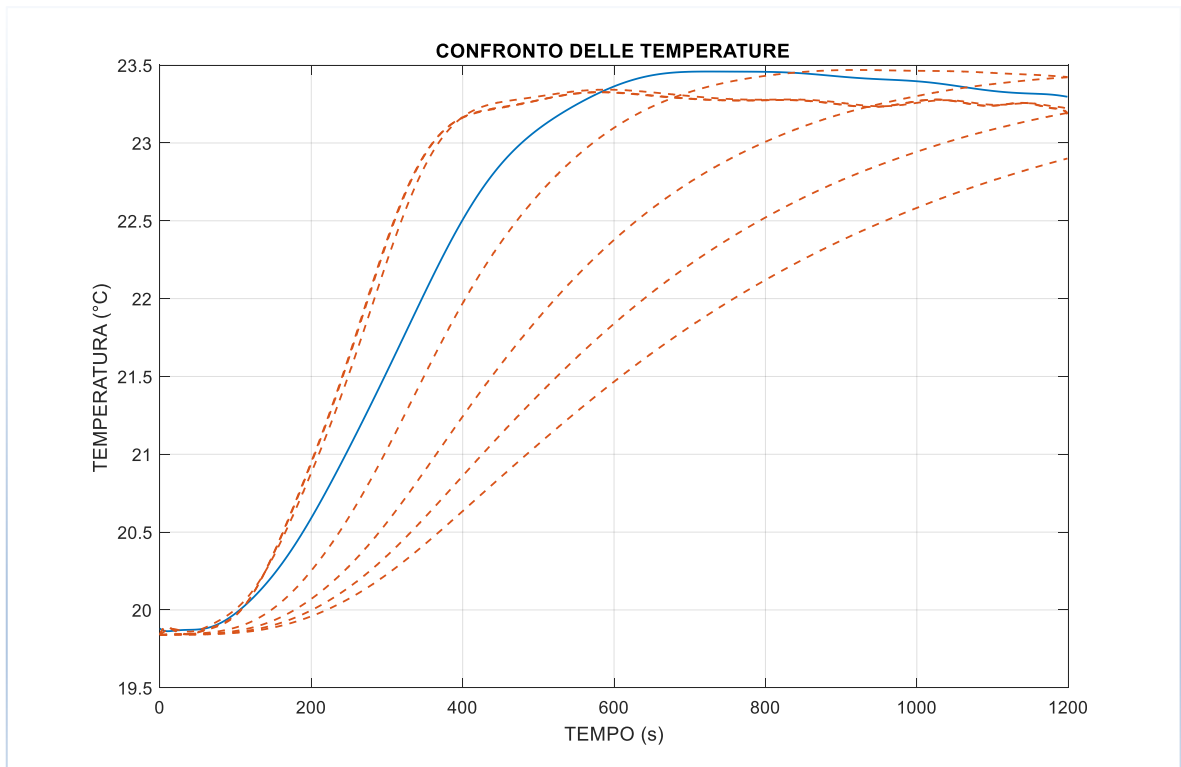


figura 5.17

Le curve che si trovano al di sotto della curva reale sono ottenute con un valore di diffusività termica minore di quella reale, infatti allo stesso istante viene raggiunta una temperatura minore. Viceversa le curva che si trovano al di sopra rappresentano un valore di  $\alpha$  superiore a quello vero.

Il valore di *diffusività termica* determinato dal modello è pari a:

$$\alpha = 0,10187 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}$$

con un errore normalizzato tra i dati sperimentali e quelli ottenuti per via numerica pari a 0,0013804.

errore =

0.0013598

diffusivita\_termica =

0.10187



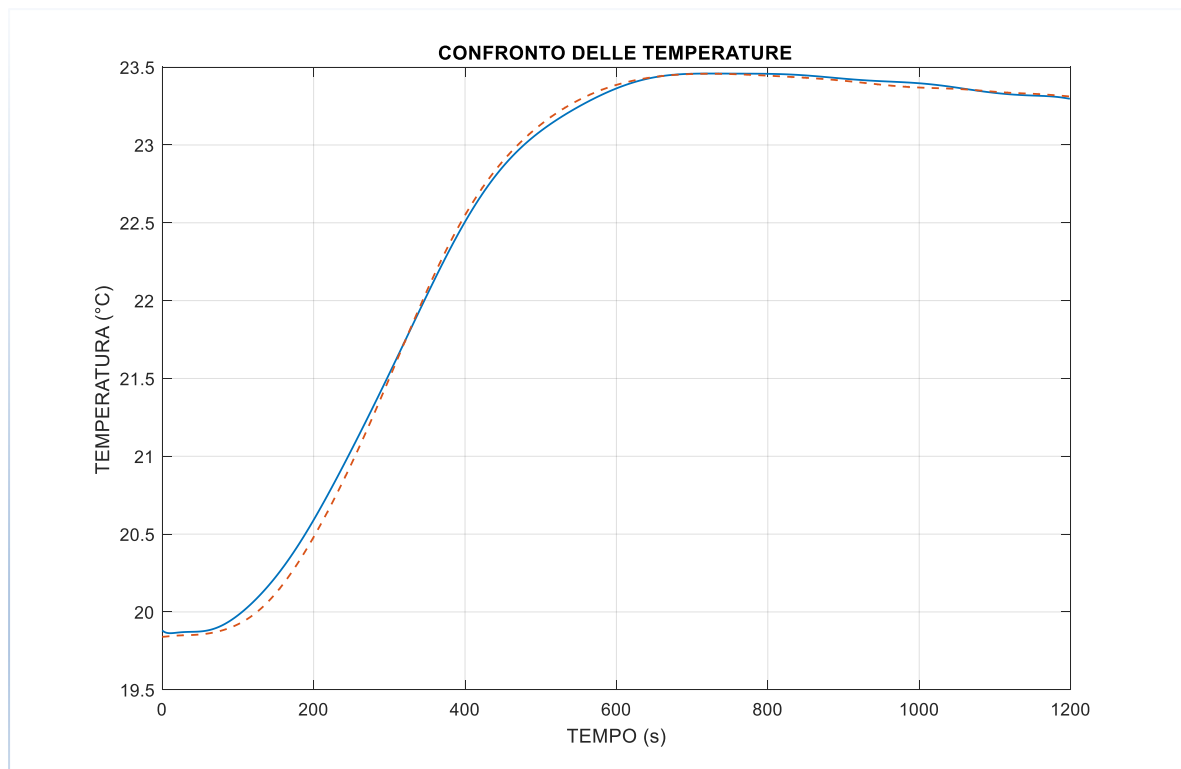


Figura 5.18– Confronto andamento sperimentale e andamento simulato

La figura 5.18 rappresenta l'andamento della temperatura calcolata dal risolutore. Come si può vedere a differenza delle curve precedentemente descritte questa si adatta con migliore precisione alla curva sperimentale.

Comparando il valore di diffusività termica ottenuto con i valori noti in letteratura si osserva un discostamento da questi ultimi del 3%.

## CONCLUSIONI

Il sistema di misura sviluppato nel presente lavoro di tesi è costituito da una parte hardware, necessaria per generare sperimentalmente il processo di conduzione termica in seno ad un dato materiale e per acquisire nel tempo i dati relativi alla distribuzione di temperatura e di flussi di calore e di una parte software dedicata alla visualizzazione ed elaborazione numerica dei dati acquisiti.

Il sistema sviluppato si basa sull'utilizzo di due celle Peltier che svolgono il ruolo di serbatoi di energia termica in grado di sottoporre il provino ad una differenza di temperatura pari a 20°C attorno alla temperatura ambiente.

Il software LabVIEW ha permesso di eseguire il controllo delle unità termiche e di acquisire tutte le informazioni relative all'evoluzione temporale delle temperature e dei flussi di calore rappresentativi del regime transitorio.

L'elaborazione dei dati sperimentali è stata poi implementata su Matlab® con un modello bidimensionale per la risoluzione numerica dell'equazione di Fourier applicando il metodo delle differenze finite. Una funzione errore, ottenuta dal confronto tra i dati sintetici forniti dal modello e quelli sperimentali, viene quindi minimizzata con una procedura iterativa che permette di determinare il valore ottimo di diffusività termica. Tutto il sistema è stato testato su un provino di PMMA che approssima i requisiti di uniformità, omogeneità, ed isotropicità al fine di poter utilizzare la simmetria assiale della trasmissione del calore in tale provino con un modello bidimensionale.

I risultati del processo di risoluzione dell'equazione differenziale e della conseguente ottimizzazione consegnano un valore di diffusività termica pari a  $\alpha = 0.10187 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}$ . Questo valore è stato confrontato con i valori forniti dalla letteratura rivelando un errore pari al 3%.

Nonostante le limitate risorse a disposizione, è stato sviluppato un sistema in grado di stimare con buona accuratezza la diffusività termica di un materiale omogeneo, isotropo,

uniforme, caratterizzato da una geometria semplice; un risultato molto confortante anche in relazione al fatto che al momento il sistema si basa su un modello bidimensionale.

Gli sviluppi futuri potrebbero riguardare l'upgrade del modello al caso tridimensionale ed eventualmente anche l'utilizzo dei dati relativi ai flussi di calore come dato accessorio per la definizione della funzione errore. In quest'ultimo caso si renderebbe necessaria una previa conoscenza della conducibilità termica, motivo per cui durante questi mesi sono state eseguite anche delle misure di conducibilità termica su diversi materiali. L'accuratezza del modello potrebbe essere migliorata sicuramente nel caso di sviluppo tridimensionale e con un aumento dei punti di temperatura ausiliari per il confronto dei dati sintetici. Per via della precisione di misura dei termoflussimetri attualmente utilizzati, l'aggiunta dei flussi di calore come dato ausiliario di verifica potrebbe anch'esso apportare dei miglioramenti; tuttavia bisogna tenere conto che effettuare il calcolo derivativo della temperatura (necessario per la determinazione del flusso di calore) potrebbe comportare un onere e un errore di calcolo tali da annullare i miglioramenti ipotizzati.

## BIBLIOGRAFIA

- P. Štefková, O. Zmeskal, *Measurement of thermophysical properties of PMMA by pulse transient method*, 2006
- Nancy Mathis, *Transient thermal conductivity measurements: comparison of destructive and nondestructive techniques*, September 1999
- H.S. Carslaw and J.C. Jager, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford at the Clarendon press 1959
- Rohde M. et al., *Intercomparison of thermal diffusivity measurements on CuCrZr and PMMA*, 2014
- A. Gasparella, *Thermal dynamic transfer properties of the opaque envelope: Analytical and numerical tools for the assessment of the response to summer outdoor conditions*, 2011
- <https://www.cti2000.eu>
- <https://www.ni.com>
- NORMA UNI EN ISO 13786:2008
- NORMA UNI EN ISO 7891-*Determinazione della conduttività termica con il metodo dei termoflussimetri*
- P. Puligheddu, *Progettazione, realizzazione e validazione sperimentale di un misuratore di conducibilità termica a cella di Peltier in regime stazionario*, 2009
- A. Salazar, *On thermal diffusivity*, 2003
- B. Lartigue, et M. Faye, *Characterizing the thermal inertia of building envelope: experimental*, 2017
- A.W Leung, *Systems of Finite Difference Equations, Numerical Solutions*, 1989
- Anis Zafirah Azmi *Numerical solution for heat equation*, 2009
- T. Dunset, *The Forward-Backward Stochastic Heat Equation: Numerical Analysis and Simulation*, 2016
- -István Faragó, *Optimal mesh choice in the numerical solution of the heat equation*, 1999