



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

Facoltà di Ingegneria e Architettura

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Tomografia acustica: modelli matematici e  
algoritmi di inversione

Relatori:

**Prof. Giuseppe Rodriguez**

**Prof. Daniele Cocco**

Tesi di Laurea di:

**Alessio Lampis**

Anno Accademico 2018-2019

*Ad Ale zero...*

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Tomografia di trasmissione</b>	<b>5</b>
2.1	Background matematico . . . . .	7
2.2	Modello continuo . . . . .	11
2.3	Modello discreto . . . . .	14
2.4	Problemi inversi . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Onde acustiche</b>	<b>27</b>
3.1	Modello monodimensionale . . . . .	27
3.2	Modello spaziale . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Tomografia di diffrazione</b>	<b>42</b>
4.1	Modello matematico . . . . .	43
4.2	Misurazione tomografica . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>52</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

In questo lavoro di tesi si vogliono dare gli strumenti matematici necessari per analizzare, comprendere e mettere in pratica la metodologia di indagine detta *tomografia*. Per tomografia si intende il processo di indagine che consiste nel "sezionare" in modo virtuale un corpo, cioè analizzare e "vedere" una sezione di un oggetto per identificare anomalie e caratteristiche interne. Questo processo si basa sulle interazioni tra l'oggetto esaminato e le radiazioni di energia sotto forma di raggi X, raggi  $\gamma$ , neutroni, fotoni, elettroni o onde elastiche, come le onde acustiche. Per esempio, basti pensare alla comune TAC (tomografia assiale computerizzata) che consente di indagare il corpo umano attraverso la ricostruzione digitale di una sezione del corpo stesso. Questa tecnica utilizza i dati raccolti dalle emissioni di raggi X che penetrano il corpo per poi convertirli in un'immagine della sezione. Ci sono altre tecniche tomografiche che sono usate in svariati ambiti della ricerca scientifica.

Lo scopo della tomografia acustica è ricostruire i parametri ignoti, come la densità del materiale, la sua compressibilità o zone di discontinuità geometrica, in una sezione dell'oggetto studiato attraverso l'analisi della propagazione del suono nel materiale stesso. L'approccio tomografico rientra nella categoria dei controlli non distruttivi e non invasivi, con la peculiarità di poter ottenere una più vasta moltitudine di dati rispetto ad altre tecniche che utilizzano un solo sensore; infatti, le informazioni ottenute dall'analisi dei segnali di molteplici sensori consentono di acquisire una conoscenza globale del campo misurato. Tuttavia, la tomografia acustica presenta degli aspetti svantaggiosi: gli algoritmi hanno un elevato costo computazionale e spesso sono mal posti. Lo scopo di questa tesi è presentare i modelli matematici e gli algoritmi di inversione della tecnica tomografica che usa il suono per analizzare le proprietà del mezzo, la *tomografia acustica*.

La tesi è divisa in tre capitoli. Il primo tratta il problema tomografico con il metodo di proiezione, detto anche di trasmissione o di velocità. Questo può essere utilizzato anche con i raggi X, con i fasci di elettroni o con i fasci di luce poiché si basa sull'ottica geometrica. In molte applicazioni ingegneristiche è possibile utilizzare la tomografia di proiezione se il comportamento dell'onda acustica è comparabile con quello di un raggio; altrimenti, per fenomeni di scattering dati dalle disomogeneità del materiale, questo metodo non dà risultati soddisfacenti.

Il secondo capitolo descrive le onde acustiche e le loro equazioni fondamentali. Si è cercato di trattare il fenomeno acustico a seconda delle diverse ipotesi e circostanze: viene dapprima trattato un modello monodimensionale che consente di capire l'equazione del moto per una particella investita dall'onda acustica e le grandezze fondamentali che descrivono il comportamento dell'onda di pressione. Alla fine del capitolo si affronta il modello in tre dimensioni e il caso di disomogeneità del mezzo. Questo capitolo è necessario per capire l'ultima parte della tesi perché dà le basi fisiche e matematiche di fenomeni complessi quali le onde acustiche che viaggiano all'interno di mezzi disomogenei.

Il capitolo di tomografia di diffrazione illustra come ricostruire una sezione dell'oggetto in esame osservando il campo di pressione acustica diffratto. Quando l'onda incontra un ostacolo (come una discontinuità del materiale), il suo fronte d'onda si deforma e diventa pressoché sferico. L'algoritmo che consente la ricostruzione consiste nell'approssimare la soluzione dell'equazione del campo di pressione.

## Capitolo 2

# Tomografia di trasmissione

Questo capitolo vuole trattare la ricostruzione tomografica come un problema di natura principalmente matematica. Proprio per questo, si parlerà in modo astratto e generale dei problemi inversi, una branca della matematica a cui appartiene la tomografia. Si affronta la ricostruzione discreta, utile perché è quella utilizzata quando abbiamo dei dati sotto forma di misurazioni e il modello continuo. Per gli elementi teorici matematici mi sono basato quasi esclusivamente sul lavoro di tesi magistrale di Federica Pes [13] e implementato dalle nozioni apprese durante il seminario di *Numerical Linear Algebra for Ill-Posed Problems* del professor Lothar Reichel. La parte introduttiva della tomografia di velocità è stata presa da [10], il modello discretizzato è stato costruito seguendo [12], descritto e simulato coi test numerici seguendo le linee guida del corso *Inverse Problems* dell'Università di Helsinki consultabile dalla loro piattaforma online [16], sempre dallo stesso corso tenuto da Samuli Siltanen e Jesse Railo è stato preso il materiale per stendere la parte sul modello continuo, insieme alla tesi di Ivana Jovanovic *Inverse Problems in Acoustic Tomography: Theory and Application* [9] e da [5]. Altre implementazioni minori sono state prese da [13], [5], [11] e [9].

**Introduzione** La tomografia di trasmissione, o di velocità, è il metodo utilizzato in molti usi pratici della tomografia acustica. Tale metodo si basa nell'approssimare il percorso di propagazione dell'onda come una linea retta, per questo viene anche detto metodo tomografico di ottica geometrica. L'onda viaggia tra emettitore del segnale e ricevitore lungo una retta e le configurazioni tra emettitore e ricevitore sono molteplici: più ricevitori e un emettitore (vedere la 2.1 presa da [10]); emettitori e ricevitori in egual numero in modo tale da formare dei fasci paralleli; un ricevitore e un emettitore, in cui l'emettitore o il ricevitore cambiano la propria posizione durante ogni misurazione.

La ricostruzione dell'immagine da delle proiezioni si può dividere in due categorie: ricostruzione nel dominio spaziale o ricostruzione nel dominio di Fourier. Una grande moltitudine di schemi e algoritmi in accordo con tali categorie sono state presentate e migliorate nel tempo. Molte, sia teoriche che sperimentali, sono state applicate primariamente nella ricostruzione dell'immagine con i raggi X, mentre per la tomografia acustica sono stati utilizzati modelli diversi. Si è visto, per esempio, che il parametro fisico da ricostruire per il caso di costruzione con i raggi X è l'in-

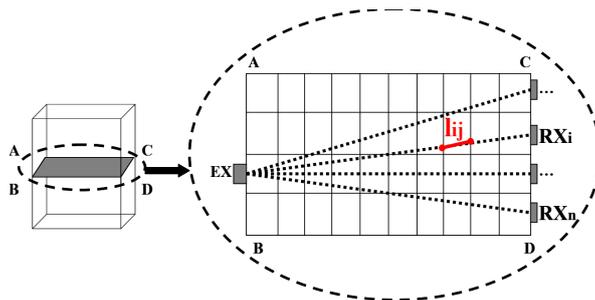


Figura 2.1: Configurazione con un emettitore e più ricevitori

tensità del raggio che attraversa un corpo opaco mentre per la tomografia acustica la misura dei soli dati di assorbimento è stata dimostrata problematica. Tuttavia, essendo quest'ultimo il metodo più semplice, si dovrà iniziare proprio dal considerare il parametro di assorbimento, o attenuazione del mezzo che può alterare ampiezza, frequenza del segnale acustico e velocità di propagazione dell'onda acustica.

**Definizione di problema tomografico** Si sceglie di misurare solamente il tempo di propagazione dell'onda tra sorgente e ricevitore. Una perturbazione elastica che si propaga tra due punti di un dato mezzo impiega un certo tempo  $t$  viaggiando con una velocità media  $v$ . Puntualmente si definisce la velocità puntuale  $v_p$  come limite a zero della distanza tra i due punti di propagazione. A tale velocità è associata una funzione di attenuazione  $f$ . Una sezione del mezzo, quella analizzata dallo studio tomografico, è un piano in cui ogni punto è definito da una funzione di attenuazione. Nel modello discreto tale funzione verrà approssimata dividendo la sezione del mezzo in  $N \times N$  celle quadrate in ciascuna delle quali la funzione è assunta costante, mentre nel problema continuo l'oggetto sotto esame è dentro un dominio 2D e definito da funzioni di attenuazione  $f(x, y)$  definite in tale dominio.

**Configurazione con fasci paralleli** Lo schema scelto è quello dei fasci paralleli, vedere la figura 2.2: la sezione dell'oggetto da studiare è posta in un riferimento di

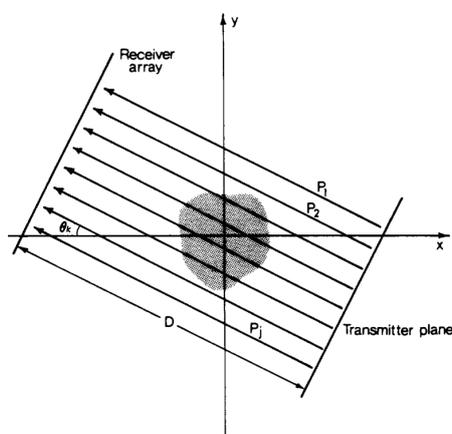


Figura 2.2: Configurazione con fasci paralleli

assi cartesiani: si identificano l'asse  $x$  delle ascisse e l'asse  $y$  delle ordinate. I trasmettitori e i ricevitori sono posti su piani paralleli e sono equidistanti tra loro. Tra ogni coppia di emettitore e ricevitore l'onda percorre un percorso lineare lungo un fascio. La misurazione è il dato che il singolo ricevitore misura, questa è la *proiezione* che contiene informazioni sulla distanza percorsa dall'onda e sulla distribuzione della funzione di attenuazione lungo la linea stessa. Si considerano un numero  $P$  di fasci paralleli inclinati di un angolo  $\theta_k$  rispetto all'asse delle ascisse. La misurazione che si effettua con questo angolo è la proiezione sul piano dell'array dei ricevitori dell'immagine, si può pensare a essa come un'ombra della sezione dell'oggetto. Le onde affette dalle disomogeneità dall'oggetto viaggiano lungo linee rette e per ogni raggio i ricevitori misurano i tempi di arrivo dell'onda. Facendo ruotare l'angolo da 0 a  $2\pi$  si ottengono tutti i dati delle proiezioni. In caso ideale il numero di angoli sarebbe infinito e quindi si avrebbe ogni possibile proiezione dell'immagine, ma nel modello discreto, e soprattutto nel calcolatore, dobbiamo limitarsi a un numero limitato di angoli.

## 2.1 Background matematico

**Delta di Dirac in 2D** La *delta di Dirac*  $\delta(x)$  (se non specificato, si intende in 1D) è una funzione generalizzata e viene spesso chiamata "simbolo di impulso" (Bracewell, 1999). Essa rappresenta un oggetto matematico la cui definizione formale viene trascurata ma vengono definite le più utili proprietà, come

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a),$$

$$\delta(x-a) = 0, \quad x \neq a$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x).$$

Per  $f \in \mathbb{R}$  una funzione a  $a$  una costante. Inoltre, la trasformata di Fourier della delta è unitaria. Infatti la delta è l'antitrasformata della funzione  $f(x) = 1$ . La funzione *delta di Dirac in due dimensioni*

$\delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  è a incognite separabili e in coordinate cartesiane. Si definisce come

$$\delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0) \quad (2.1)$$

dove  $\mathbf{r}_0$  indica l'origine tale per cui la delta è

$$\delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \begin{cases} 0, & \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \\ \infty, & \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \end{cases}.$$

Similmente alla delta di Dirac in 1D

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r})\delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)d^2\mathbf{r} = f(\mathbf{r}_0), \quad (2.2)$$

dove  $\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ . Una proprietà importante per lo studio tomografico. Se  $S$  definisce un dominio finito di una superficie 2D, allora si può riscrivere la precedente proprietà come

$$\int_S f(\mathbf{r})\delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)d^2\mathbf{r} = f(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r}_0 \in S. \quad (2.3)$$

Dalla definizione di delta di Dirac in 2D notiamo che l'ultimo integrale è nullo quando il vettore  $\mathbf{r}_0 \notin S$ . La delta di Dirac non è proprio una funzione ma più un oggetto matematico che è molto utile in applicazioni pratiche, soprattutto nella teoria dei segnali e nell' image processing. Per questo motivo, si riprende la funzione di Dirac e si dimostra che

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ikx) dk. \quad (2.4)$$

Per farlo, cerchiamo di vederla in relazione a una vera e propria funzione. Si definisce la funzione  $\text{sinc}(x)$  come

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

e una funzione ausiliaria

$$\delta(\alpha, x) = \frac{\alpha}{\pi} \text{sinc}(\alpha x)$$

con  $\alpha > 0$  è una costante. Questa funzione ha valore massimo per  $x = 0$  quando  $\text{sinc}(0) = 1$  e  $\delta(\alpha, x) = \frac{\alpha}{\pi}$ . Come il valore di  $\alpha$  aumenta, la funzione  $\text{sinc}(\alpha x)$  si contrae verso lo zero e la funzione ausiliaria aumenta in modulo. La situazione limite è quando  $\alpha \rightarrow \infty$  e la  $\text{sinc}(\alpha, x)$  collassa in un singolo punto di picco per  $x = 0$  e  $\delta(\alpha, x) = \frac{\alpha}{\pi}$  è infinitamente grande. Quindi, possiamo considerare i seguenti risultati

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \delta(\alpha, x), \quad (2.5)$$

e notando che

$$\delta(\alpha, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \exp(ikx) dk,$$

per il legame con la trasformata, si ha la 2.4 dall'unione della 2.5. Se applicato allo spazio  $\mathbb{R}^2$ , la delta in 2D è

$$\delta(x)\delta(y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik_x x) dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik_y y) dk_y \quad (2.6)$$

o in notazione vettoriale

$$\delta^2(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^2\mathbf{r} \quad (2.7)$$

dove  $\mathbf{k} = k_x \hat{i} + k_y \hat{j}$  sono le componenti del vettore d'onda o le frequenze spaziali della funzione (in cicli per metro). Ricordando che la contrazione della funzione ausiliaria a un picco infinitesimo è un comportamento adeguato in termini ingegneristici, lo è meno in termini matematici. Questo perché la 2.5 non definisce in modo accurato un operatore con le proprietà della  $\delta$ , tuttavia è possibile essere più rigorosi alla definizione di delta con la seguente

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha, x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0). \quad (2.8)$$

In generale, per  $n = 1, 2, 3$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}) \delta^n(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) d^n\mathbf{r} = f(\mathbf{r}_0). \quad (2.9)$$

La delta è descritta per il ruolo che gioca come operatore matematico e non ci si sofferma tanto sulla sua definizione. Infatti, come già detto, la delta di Dirac non è una funzione ma una distribuzione con delle proprietà di shifting uniche ed è per questo motivo che ha un campo di applicazioni molto vasto.

**Trasformata di Fourier in 2D** Sia la serie di Fourier  $f(x, y)$  espressa in termini complessi

$$f(x, y) = \frac{1}{(2L)^2} \sum_n \sum_m F_{nm} \exp\left(\frac{inx\pi}{L}\right) \exp\left(\frac{imy\pi}{L}\right)$$

dove

$$F_{nm} = \int_{-L}^L \int_{-L}^L f(x, y) \exp\left(\frac{-inx\pi}{L}\right) \exp\left(\frac{-imy\pi}{L}\right) dx dy.$$

Siano  $k_n = \frac{n\pi}{L}$ ,  $k_m = \frac{m\pi}{L}$  e  $\Delta k_n = \Delta k_m = \frac{\pi}{L}$  e riscriviamo la serie come

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_n \sum_m F_{nm} \exp(ik_n x) \exp(ik_m y) \Delta k_n \Delta k_m$$

$$F_{nm} = \int_{-L}^L \int_{-L}^L f(x, y) \exp(-ik_n x) \exp(-ik_m y) dx dy.$$

Per il limite  $L \rightarrow \infty$ , abbiamo

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k_x, k_y) \exp(ik_x x) \exp(ik_y y) dk_x dk_y$$

$$F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp(-ik_x x) \exp(-ik_y y) dx dy.$$

Nell'ultima,  $F(k_x, k_y)$  è la *trasformata di Fourier in 2D* di  $f(x, y)$  funzione non periodica. Si indica l'operatore trasformato di Fourier in 2D con  $\mathcal{F}_2\{f\}$ . Se utilizziamo la notazione vettoriale, con la solita notazione di  $\mathbf{k} = k_x \hat{i} + k_y \hat{j}$  e  $\mathbf{r} = x \hat{i} + y \hat{j}$ ,

$$F(\mathbf{k}) = \mathcal{F}_2\{f(\mathbf{r})\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^2\mathbf{r}. \quad (2.10)$$

L'inversa può essere ottenuta moltiplicando  $F(\mathbf{k})$  per  $\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}')$  per poi integrare in  $\mathbf{k}$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') d^2\mathbf{k} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})] d^2\mathbf{k},$$

il secondo membro deriva direttamente da 2.10. Inoltre, l'integrale a destra del secondo membro può essere riscritta secondo la 2.7 come

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})] d^2\mathbf{k} = (2\pi)^2 \delta^2(\mathbf{r}' - \mathbf{r});$$

quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') d^2\mathbf{k} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}) (2\pi)^2 \delta^2(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) d^2\mathbf{r}.$$

Ma, dalla 2.9 ricaviamo la

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r})(2\pi)^2 \delta^2(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) d^2\mathbf{r} = (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}) \delta^2(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) d^2\mathbf{r} = f(\mathbf{r}')$$

che porta alla definizione di *antitrasformata di Fourier in 2D*:

$$f(\mathbf{r}) = \mathcal{F}_2^{-1}\{\mathcal{F}(\mathbf{k})\} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') d^2\mathbf{k}. \quad (2.11)$$

La trasformata di Fourier costituisce una rappresentazione della frequenza di una funzione. Dal punto di vista fisico, quello che rende la trasformata così utile, è il fatto che "riflette" il modo in cui le onde nascono in natura, per esempio da una sovrapposizione di onde sinusoidali di differente ampiezza e frequenza. Inoltre, la trasformata di Fourier di una funzione definisce il suo *spettro*, che può essere scritto nella forma seguente

$$F(\mathbf{k}) = F_r(\mathbf{k}) + iF_i(\mathbf{k}) \quad (2.12)$$

dove  $F_r$  è la parte reale di  $F(x)$ , mentre  $F_i$  è la sua parte immaginaria.

Se  $f(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}^2$ , allora

$$F_r(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}) \cos(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^2\mathbf{r}$$

e

$$F_i(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}) \sin(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^2\mathbf{r}.$$

Quindi, lo spettro di una funzione reale è una funzione complessa del tipo

$$F(\mathbf{k}) = A(\mathbf{k}) \exp[i\theta(\mathbf{k})] \quad (2.13)$$

dove  $A(x)$  è l'*ampiezza spettrale* definita come

$$A(x) = |\mathcal{F}(\mathbf{k})| = \sqrt{F_r^2 + F_i^2}, \quad (2.14)$$

$\theta$  è la *fase dello spettro*

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{F_i}{F_r} \right). \quad (2.15)$$

Inoltre, si definisce la *potenza spettrale*  $P$  come

$$P(\mathbf{k}) = |F(\mathbf{k})|^2. \quad (2.16)$$

Nel caso in cui  $k = 0$ , abbiamo che la trasformata a zero frequenza

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r}. \quad (2.17)$$

## 2.2 Modello continuo

Sia l'oggetto sotto esame un dominio  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  e si consideri, per il momento, un singolo raggio  $\Gamma(z, \theta)$  che lo attraversa. Il raggio è definito da una retta  $z$ , perpendicolare al raggio, e da un angolo  $\theta_k$ . Ogni punto sul raggio è definito dal vettore  $\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$  e l'onda si propaga lungo la direzione definita dal vettore d'onda  $\mathbf{k}$ . La funzione di attenuazione  $f(x, y)$  è distribuita dentro il dominio. La singola proiezione della caratteristica di assorbimento è definita dalla seguente equazione

$$m(z, \theta) = \int_{\Gamma(z, \theta)} f(x, y) d\ell. \quad (2.18)$$

L'elemento infinitesimo della retta che passa attraverso la funzione di attenuazione è indicato con  $d\ell$ . La funzione  $m(z, \theta)$  rappresenta la proiezione della funzione di assorbimento del materiale, per questo motivo, questo tipo di ricostruzione dell'immagine è detta tomografia di proiezione. La 2.18 viene spesso chiamata *equazione dei raggi X* visto il suo largo utilizzo nella tomografia a raggi X. Ovviamente, questa equazione può essere usata tutte le volte in cui il sistema ricevitore-trasmittitore è contraddistinto da un segnale esploratore che è assunto come un raggio che attraversa il materiale e le sue proprietà (misurabili) sono in qualche modo legate alle caratteristiche fisiche del materiale. Il problema tomografico consiste nell'invertire l'equazione 2.18 per ottenere la  $f(x, y)$  data la conoscenza di  $m(z, \theta)$  per ogni valore di  $z$  e  $\theta$ . Consideriamo ora  $\theta = 0$ , la proiezione per questo angolo sarebbe

$$m(z, 0) = \int f(z, y) dy \quad (2.19)$$

perché è ottenuta semplicemente integrando l'equazione dei raggi X lungo  $y$  per tutti i valori di  $z$ . Per  $\theta = \pi/2$ , similmente, la proiezione vale

$$m(z, \pi/2) = \int f(z, x) dx. \quad (2.20)$$

La collezione di linee parallele integrate per diversi angoli si chiama trasformata di Radon. La funzione back-projection  $\hat{B}$  è l'inversione della funzione di proiezione

$$\hat{B}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi m(x \cos(\theta) + y \sin(\theta), \theta) d\theta \quad (2.21)$$

e rappresenta la distribuzione di  $m$  lungo la famiglia di rette  $\Gamma$ , cioè la ricostruzione dell'immagine. In altre parole, per un certo angolo fissato, la misurazione  $m$  è ricostruita assegnando i valori delle proiezioni sull'asse  $z$  al dominio  $\Omega$  (per ogni valore di  $z$ , si assegna alla retta che giace sul dominio un solo valore). Si ripete lo stesso processo e per ogni valore di  $\theta$ . Sommando queste misurazioni, si ottiene la funzione di back-projection, che è una prima inversione della misurazione. Per migliorare l'inversione si aggiunge un filtro.

Ipotizziamo che la funzione di attenuazione sia l'inverso della velocità dell'onda, detta *lentezza*, quindi ci interessa misurare il tempo di volo dell'onda che percorre tra l'emettitore dell'impulso e il ricevitore lungo  $\Gamma$

$$t = \frac{\Gamma}{c},$$

con  $c$  velocità dell'onda. Similmente alla 2.18, possiamo riscrivere la funzione di misurazione in modo da includere la lentezza

$$m(z, \theta) = \int_{\Gamma(z, \theta)} \frac{d\ell}{c(x, y)}. \quad (2.22)$$

In questo caso si può ricostruire l'immagine anche se il materiale è disomogeneo, cioè presenta caratteristiche fisiche che cambiano nel suo dominio, ed è necessario invertire l'equazione precedente. Oltre al tempo di volo, nella tomografia acustica, viene misurato il decadimento dell'ampiezza del segnale, questo metodo non verrà discusso in questa tesi.

Si potrebbe avere il campo di densità del materiale, utile a individuare difetti, o, per esempio, si può ricostruire un tomogramma della viscosità della sezione. Inoltre, oltre ai raggi X e alle onde ultrasonore, vengono generati dei segnali elettromagnetici per esplorare certe caratteristiche quali l'indice di rifrazione, la capacitanza, la resistenza e l'induttanza. In certi casi, si utilizzano sistemi basati su isotopi radioattivi nella Emission Computed Tomography.

**Trasformata di Radon** Alla base della tomografia di trasmissione c'è la trasformata di Radon poiché gli algoritmi di inversione che verranno trattati derivano da tale trasformata. Si consideri la funzione di delta in 2D

$$\delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0),$$

la si scrive in termini integrali secondo la 2.7

$$\delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)] d^2\mathbf{r}. \quad (2.23)$$

Si introduce il vettore d'onda  $\mathbf{k} = k\hat{k}$  con  $\hat{k}$  il versore direzione. Notiamo che, dalla proprietà 2.1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ikz)\delta(z - \hat{k} \cdot \mathbf{r}) dz = \exp(-ik\hat{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.24)$$

e dalla 2.6

$$\begin{aligned} \delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik\hat{k} \cdot \mathbf{r}_0) \exp(-ik\hat{k} \cdot \mathbf{r}) d^2\mathbf{r} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik\hat{k} \cdot \mathbf{r}_0) d^2\mathbf{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ikz)\delta(z - \hat{k} \cdot \mathbf{r}) dz. \end{aligned} \quad (2.25)$$

In coordinate polari

$$\delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} k dk \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[ik(\hat{k} \cdot \mathbf{r}_0 - z)] \delta(z - \hat{k} \cdot \mathbf{r}) dz. \quad (2.26)$$

Tralasciando qualche passaggio, la funzione delta di Dirac in 2D si può riscrivere come

$$\delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{\hat{k} \cdot \mathbf{r}_0 - z} \right) \frac{\partial}{\partial z} \delta(z - \hat{k} \cdot \mathbf{r}) dz. \quad (2.27)$$

Questo ultimo risultato tornerà utile per definire in modo semplice la trasformata e l'antitrasformata di Radon. Si consideri la funzione di attenuazione  $f(\mathbf{r}_0)$  riferita all'oggetto in 2D e la si scriva secondo la 2.9 per  $n = 2$

$$f(\mathbf{r}_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}) \delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) d^2\mathbf{r}$$

e si inserisca la 2.27

$$f(\mathbf{r}_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}) \left[ \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{\hat{k} \cdot \mathbf{r}_0 - z} \right) \frac{\partial}{\partial z} \delta(z - \hat{k} \cdot \mathbf{r}) dz \right] d^2\mathbf{r}$$

per poi cambiare l'ordine di integrazione

$$f(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{\hat{k} \cdot \mathbf{r}_0 - z} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}) \delta(z - \hat{k} \cdot \mathbf{r}) d^2\mathbf{r} \right] dz. \quad (2.28)$$

Il termine  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}) \delta(z - \hat{k} \cdot \mathbf{r}) d^2\mathbf{r}$  è una funzione chiamata *trasformata di Radon di f* e misura il valore della proiezione, o dell'integrale di linea, di  $f$  lungo una linea perpendicolare alla direzione di  $\hat{k}$ . L'operatore trasformata di Radon di  $f$  si indica

$$\mathcal{R}\{f(\mathbf{r})\} = \int f(\mathbf{r}) \delta(z - \hat{k} \cdot \mathbf{r}) d^2\mathbf{r}. \quad (2.29)$$

**Antitrasformata di Radon** L'antitrasformata di Radon corrisponde alla  $f(\mathbf{r})$ . Indicando con  $\mathcal{R}^{-1}f(\mathbf{r})$  l'operatore antitrasformata di  $f$ , dalla 2.28 otteniamo che

$$\mathcal{R}^{-1}f(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{\hat{k} \cdot \mathbf{r}_0 - z} \right) \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{R}\{f(\mathbf{r})\} dz. \quad (2.30)$$

**Filtered back-projection** Si introducano due operatori: il *filtro di Hilbert*, o *operatore di Hilbert*  $\hat{H}$  definito come

$$\hat{H}\{f\} = \frac{1}{\pi} \int \frac{m(z)}{\hat{k} \cdot \mathbf{r}_0 - z} dz \quad (2.31)$$

e l'*operatore back-projection*  $\hat{B}$

$$\hat{B}\{f\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi m(\hat{k}, \hat{k} \cdot \mathbf{r}_0) d\theta \quad (2.32)$$

così da poter scrivere l'antitrasformata come

$$\mathcal{R}^{-1} = \hat{B}\hat{H}\partial_z. \quad (2.33)$$

Questo significa che per calcolare l'antitrasformata si eseguono due operazioni: si applica l'operatore di Hilbert e poi l'operatore back-projection. Questo è conosciuto come *filtered back-projection*. Nella pratica si possono usare altri filtri oltre a quello di Hilbert e questo metodo consente di ridurre il blurring nella tomografia.

**Central slice theorem** Il seguente teorema vuole mettere in luce le relazioni tra le proiezioni nello spazio reale e quelle nello spazio di Fourier. In particolare, il *Fourier slice theorem*, o *projection slice theorem* o *central slice theorem* ci dice che: la trasformata di Fourier in 1D di una proiezione di un oggetto ottenuta per l'angolo  $\theta$  corrisponde alla fetta centrale dell'oggetto definito nello spazio di Fourier in 2D per lo stesso angolo. In altre parole, se si prende  $f(\mathbf{r})$ , la si proietta con la trasformata di Radon ( $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ), quindi si effettua la trasformata di Fourier 1D, equivale a prendere una fetta della trasformata di Fourier 2D di  $f(\mathbf{r})$ . Si dimostra che

$$\mathcal{F}_2\{f(\mathbf{r})\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}) \exp(-ik\hat{k} \cdot \mathbf{r}) d^2\mathbf{r}$$

equivale a scrivere

$$\mathcal{F}_2\{f(\mathbf{r})\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ikz) \delta(z - \hat{k} \cdot \mathbf{r}) dz \right] d^2\mathbf{r}$$

la cui, cambiando l'ordine di integrazione, corrisponde a

$$\mathcal{F}_2\{f(\mathbf{r})\} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikz) dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}) \delta(z - \hat{k} \cdot \mathbf{r}) d^2\mathbf{r}. \quad (2.34)$$

Come volevasi dimostrare, il primo integrale del secondo membro è la trasformata di Fourier 1D e il secondo integrale è la trasformata di Radon:

$$\mathcal{F}_2\{f(\mathbf{r})\} = \mathcal{F}_1\mathcal{R}\{f(\mathbf{r})\}. \quad (2.35)$$

## 2.3 Modello discreto

**Problema tomografico discreto** Il problema tomografico discreto consiste nella ricostruzione della distribuzione delle funzioni di attenuazioni nelle  $N \times N$  celle partendo dalla conoscenza dei tempi di propagazione delle onde misurate lungo i percorsi di fasci paralleli che congiungono i punti sorgente con i punti ricevitori. Si effettuano  $M$  misurazioni. In questa metodologia si ignora l'indeterminazione dell'effettivo tragitto che l'onda percorre dal punto sorgente al punto ricevitore, si ipotizza una relazione lineare tra velocità dell'onda e tempo percorso e infine si considera come onda solo un'onda longitudinale che ha la direzione del fascio. Il metodo proposto è simile alla ricostruzione dell'indice di rifrazione in ottica, per questo prende anche il nome di metodo ottico-geometrico. Questo modello, a seconda del mezzo trattato, risulta eccessivamente semplificato rispetto alla realtà fisica. Infatti, analizzando solamente la velocità di propagazione dell'onda longitudinale si trascurano le modalità di con cui l'onda si propaga. Un approccio ottimizzato all'indagine acustica dovrebbe prevedere non soltanto i tempi di volo dell'onda ma anche gli effetti di riflessione, trasmissione attraverso zone del materiale non omogenee, attenuazione spettrale della frequenza tipica del materiale e diffrazione. Si deve tuttavia menzionare che ci sono stati dei tentativi nell'includere delle correzioni a questo modello approssimato usando la teoria dell'ottica geometrica. Come rimedio ai problemi di riflessione e rifrazione nella ricostruzione con i dati di attenuazione, la ricostruzione della distribuzione delle funzioni nei mezzi disomogenei è

stata proposta nella letteratura, ma non verrà trattata in un questo lavoro. I valori delle funzioni di attenuazione si ottengono risolvendo il seguente sistema lineare di equazioni

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (2.36)$$

in cui  $\mathbf{x}$  è il vettore delle funzioni di attenuazione,  $\mathbf{b}$  è il vettore dei tempi di propagazione misurati e  $\mathbf{A}$  è la matrice dei coefficienti, nella quale il generico elemento  $L_{ij}$  rappresenta la lunghezza del  $j$ -esimo fascio all'interno della  $i$ -esima cella.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_{N \times N} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_M \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots \\ \vdots & \ddots & \\ L_{M1} & & L_{M(N \times N)} \end{bmatrix}.$$

Il numero totale di celle è  $N \times N$ , per facilità di rappresentazione sia d'ora in avanti indicato con  $N^{tot}$ . La singola misura  $m_{kj}$  del  $j$ -esimo raggio inclinato del  $k$ -esimo angolo si costruisce come

$$m_{ij} = \sum_{i=1}^{N^{tot}} \frac{L_{ij}^{(k)}}{c_i} + \frac{D - \sum_{i=1}^{N^{tot}} L_{ij}^{(k)}}{c_m},$$

dove  $D$  è la distanza tra il singolo emettitore e ricevitore,  $L_{ij}^{(k)}$  è la lunghezza della  $i$ -esima cella attraversata dal  $j$ -esimo raggio inclinato di un angolo  $\theta_k$ . La *velocità del mezzo indisturbato* è  $c_m$  mentre la velocità del suono caratteristica della singola cella, che caratterizza  $f$ , è indicata con  $c_i$ . Per ogni misurazione, se  $c$  è un numero  $P$  di raggi (o fasci) e  $N^{tot}$  di celle, allora si definiscono un numero  $P$  di equazioni in  $N^{tot}$  variabili. Tipicamente per questo tipo di problema tomografico  $N^{tot} \gg P$ . La funzione di attenuazione della singola cella è definita come

$$f_i = \frac{1}{c_k} - \frac{1}{c_m}.$$

Questa ultima definizione ci permette di definire la singola misurazione come

$$\sum_{i=1}^{N^{tot}} L_{ij}^{(k)} f_i = m_{ij}. \quad (2.37)$$

Se si considerano tutte le misurazioni effettuate in tutti gli angoli possibili, si costruisce il sistema lineare  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ .

**Esempio semplificato** prediamo come esempio un modello semplificato per capire come viene costruito il sistema lineare. Una griglia formata da  $3 \times 3$  quadrati di lato unitario rappresenta l'oggetto sotto esame. A ogni quadrato della griglia è associato un valore di  $f_i$ , perciò l'oggetto è definito da 9 funzioni di attenuazione. Si immagini che l'array sia costituito da 3 fasci e essi fatti ruotare tre volte (0, 45 e 90). Vengono effettuate quindi 9 misurazioni, 3 per ogni posizione dei fasci definita dall'angolo, si veda la figura 2.3. Se si dovessero calcolare le misure  $m_1, m_2, m_3, \dots$  sarebbe sufficiente utilizzare la 2.37, ma il problema tomografico consiste nel calcolare  $f_1, f_2, f_3, \dots$  date le misurazioni e le lunghezze. Per capire questa tipologia di problemi, si introducono di seguito i problemi inversi.

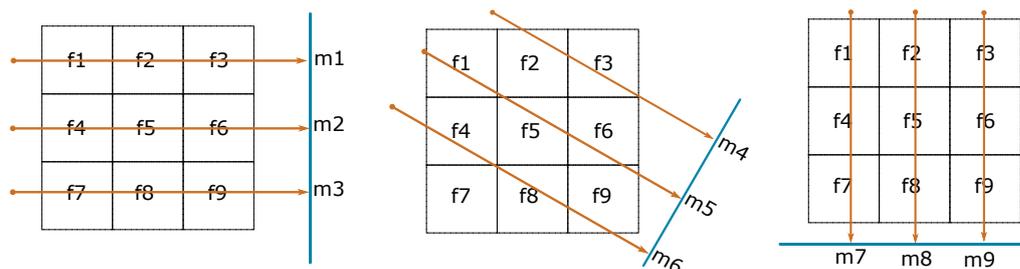


Figura 2.3: Esempio semplificato: tre angoli e 9 misurazioni

## 2.4 Problemi inversi

**Introduzione** Spiegare il mondo con un modello matematico è sempre stato uno dei più importanti fini degli scienziati per capire i sistemi fisici e prevedere, dato un input, i loro comportamenti. Ogni modello, usando il linguaggio matematico, restituisce una grandezza fisica che è da una parte la soluzione dell'equazione costituente il modello, dall'altra la predizione. Concettualmente, mentre il *problema diretto* si occupa di prevedere gli effetti di un fenomeno conoscendone la causa, il *problema inverso* sorge quando si vuole scoprire la causa degli effetti osservati. Se il modello che lega la causa all'effetto è lineare, allora si parla di *problema inverso lineare* e la maggior parte dei problemi studiati sono di questa natura. Oltre all'oggetto di studio di questa tesi, ci sono tantissimi problemi di ingegneria e di scienza che sono, di fatto, inversi. Il calcolo della densità della terra studiando il campo gravitazionale, la ricostruzione degli strati di terreno con l'analisi delle onde acustiche che li attraversano, rilevamento di cricche dentro ai manufatti meccanici ecc. Formalmente, il problema inverso lineare è spesso scritto come

$$\int_{\Omega} \text{input} \times \text{system} d\Omega = \text{output}.$$

Il problema diretto consiste nel calcolare l'output, dato l'input e il system (nucleo dell'operatore differenziale). Il problema inverso, invece, consiste nel determinare l'input dati output e system. Tuttavia, mentre la difficoltà nei problemi diretti è avere un system tanto più fedele alla realtà, nei problemi inversi le sfide sono molteplici: il numero di incognite e di equazioni è quasi mai uguale, cioè è impossibile trovare un'unica soluzione; i dati possono non essere sufficienti, avremo quindi bisogno di altri dati detti *informazioni a priori*; i dati sono "sporchi", ovvero contengono degli errori di misurazione. Per questo si può affermare che lo studio dei problemi inversi può essere considerato più complesso di quello dei problemi diretti.

Nel nostro esempio discreto, il problema diretto consiste nel calcolare le misure  $m_1, m_2, m_3, \dots$  mentre per il problema continuo, calcolare la funzione  $m(x, y)$ .

Un primo approccio per capire come risolvere un problema inverso è partire da un modello lineare *discreto*, cioè tale da essere descritto tramite un sistema lineare di equazioni. Questo ci permetterà di studiare le proprietà, gli algoritmi e le soluzioni di un problema inverso con le nozioni dell'algebra lineare. Inoltre, nei problemi

pratici di tomografia, i dati misurati sono finiti perciò è necessario utilizzare un modello discreto. Si riprende il nostro problema tomografico

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

in cui sono presenti tutte le informazioni necessarie alla soluzione del problema inverso. Si tenga conto che  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{b}$  possono o meno essere affette da errore, che sia sistematico o stocastico, perciò volta per volta verrà specificato se tali matrici e vettori sono "esatte" o con errore.

Riprendendo il nostro esempio semplificato, si nota che il numero di incognite, le funzioni di attenuazione, è lo stesso delle equazioni, il numero di misurazioni. Tuttavia, questo è un caso raro. La maggior parte delle volte non si può imporre che questi due numeri siano uguali. Perciò, la maggior parte dei problemi tomografici hanno un problema di natura algebrica, cioè la soluzione non è univoca.

**Phantom** Basti prendere infatti un esempio più complesso per capire quanto è normale avere un problema del genere. Si è creato un phantom che vuole emulare una sezione trasversale di un trafilato in metallo con due micro difetti e un'area di densità diversa. Il phantom è stato realizzato su Matlab e consiste in un rettangolo di sfondo nero, i micro difetti sono bianchi e l'area con densità diversa è grigia. Esso è costituito da una griglia  $20 \times 20$  come si vede in figura 2.5. Il problema tomografico consiste di  $N^{tot} = 400$  incognite e il numero di misurazioni dipende dal numero di angoli che si sceglie, mentre il numero di raggi è scelto in automatico. Per costruire il problema tomografico bisogna costruire la matrice dei coefficienti, che ha un numero di righe pari al numero di misurazioni e un numero di colonne pari al numero di incognite.

In Matlab, la matrice  $\mathbf{A}$  è costruita partendo dalla funzione `radon(phantom, angles)` che ne calcola in senogramma dato il numero di angoli (90 in questo caso) e il phantom. Il senogramma è una matrice che contiene le misurazioni e si ottiene tramite una operazione lineare e consiste nel calcolo dell'integrale di linea lungo i raggi, quindi viene ordinato sistematicamente in una matrice che ha un numero di righe pari al numero di raggi e un numero di colonne pari al numero di angoli. Quindi, in questo caso è  $M = 33 \times 90$ . Il numero di righe viene scelto in automatico dalla funzione in Matlab e viene computato in base alle dimensioni del phantom e dalle rotazioni che i raggi compiono, o le direzioni delle misurazioni. La matrice  $\mathbf{A}$  ha dimensioni  $M \times N^{tot}$ . Si rimanda alla figura 2.4 per vedere la matrice dei coefficienti, che è stata creata da un algoritmo su Matlab che non verrà trattato in questa sede.

Nei problemi di tomografia, i recettori e talvolta i trasmettitori si trovano esterni al dominio di indagine. Anche se non è dimostrato, i problemi di questo tipo risultano sempre mal posti o mal condizionati. Non c'è un vero motivo. Se il problema continuo è mal posto, è pressoché certo che questo si trasformerà in cattivo condizionamento della matrice della discretizzazione, ma per accorgersene bisogna calcolare la matrice e vedere i suoi valori singolari.

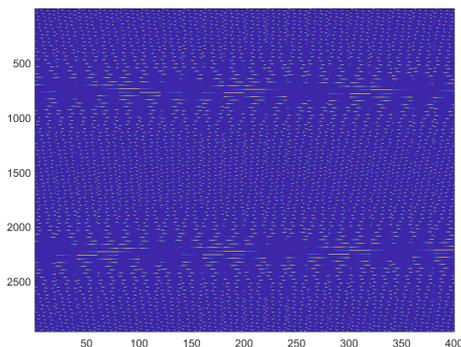


Figura 2.4: Matrice dei coefficienti

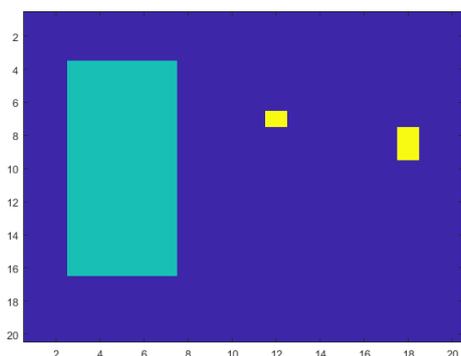


Figura 2.5: Phantom 20x20

**Problemi mal posti** I problemi inversi sono tipicamente *mal posti*, cioè sono problemi che hanno almeno una delle seguenti proprietà:

- non hanno una soluzione;
- non hanno una soluzione univoca;
- la soluzione non dipende dai dati in maniera continua.

**Numero di Condizionamento** Sia  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N^{tot}}$  e  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^M$ . Si considera il il nostro problema tomografico espresso dal seguente sistema lineare di equazioni

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Si definisce *numero di condizionamento* di una matrice la quantità

$$\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|. \quad (2.38)$$

Indicando con  $\delta\mathbf{b}$  il vettore perturbazione del termine noto e con  $\delta\mathbf{x}$  la corrispondente perturbazione della soluzione, il numero di condizionamento misura il massimo fattore di amplificazione relativo sulla soluzione rispetto all'errore relativo sui dati

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}. \quad (2.39)$$

Se  $\kappa(\mathbf{A})$  è grande allora solo alcune righe o colonne di  $\mathbf{A}$  sono linearmente dipendenti. Questo si traduce nell'aver un errore relativo nella soluzione anche se l'errore relativo ai dati è piccolo. Si dice che un problema è *ben condizionato* se il numero di condizionamento è circa uguale a 1, altrimenti è *mal condizionato*.

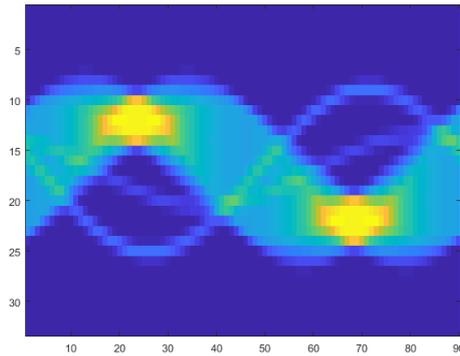


Figura 2.6: Senogramma

Per farci un'idea, per l'esempio che stiamo trattando, si può calcolare il numero di condizionamento della matrice con la funzione  $\text{cond}(\mathbf{A})$  di Matlab, nel nostro caso  $\kappa(\mathbf{A}) = 1.3745e+03$ , un valore che indica il forte mal condizionamento del problema.

**Regolarizzazione** Se il modello matematico utilizzato per studiare un certo fenomeno non porta a una soluzione stabile, magari perché minimizza le dipendenze lineari e perciò rendere molto difficile la ricerca della soluzione, bisogna modificarlo. Per farlo, come già ribadito, si andranno a vedere algoritmi, o strumenti numerici, che vengono chiamati anche *metodi di regolarizzazione*.

Se un problema ha la matrice dei coefficienti mal condizionata, si sceglie l'algoritmo migliore in base alla tipologia del mal condizionamento. Infatti, nei problemi pratici, si considerano due importanti categorie di problemi con matrice mal condizionata: i *problemi a rango non pieno* e i *problemi mal posti*. I primi sono caratterizzati da una matrice  $\mathbf{A}$  tale da avere una o più righe o colonne che sono quasi combinazione lineare di alcune o tutte le righe e colonne rimanenti. In questo caso il trattamento numerico efficace consiste nell'estrarre la parte linearmente indipendente in  $\mathbf{A}$  in modo tale da definire un nuovo problema con una matrice ben condizionata. In particolare, questa tesi tratterà la SVD troncata e la GSVD troncata come metodi di regolarizzazione che si basano sulla decomposizione ai valori singolari.

**Rango di una matrice** Per definire i problemi a rango non pieno, si introduce il concetto seguente:

Sia  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N^{tot}}$ , il *rango* di  $\mathbf{A}$  si indica con  $\text{rank}(\mathbf{A})$  e si definisce ugualmente come il massimo numero di righe linearmente indipendenti di  $\mathbf{A}$ , il massimo numero di colonne linearmente indipendenti di  $\mathbf{A}$  o la dimensione del sottospazio vettoriale generato dalle righe o dalle colonne di  $\mathbf{A}$ . Queste definizioni sono equivalenti tra loro. La matrice si dice a *rango massimo* o *rango pieno* se  $\text{rank}(\mathbf{A}) = \min(M, N^{tot})$ , altrimenti si dice a *rango non pieno*. Se  $M = N^{tot}$  (come già detto, molto improbabile) allora  $\mathbf{A}$  è invertibile se e solo se ha rango  $N^{tot}$  (rango massimo).

In genere per i problemi inversi la matrice  $\mathbf{A}$  è non quadrata, mal condizionata e di rango non pieno, per cui non è possibile calcolarne esattamente l'inversa. Inoltre, se il problema è discreto e lineare, se la matrice  $\mathbf{A}$  ha rango mal determinato e rango non pieno, allora il problema è mal posto. Per analizzare e migliorare il problema inverso, si effettua la decomposizione ai valori singolari.

**SVD e GSVD** La decomposizione della matrice  $\mathbf{A}$  ai valori singolari e la sua generalizzata si definiscono come segue. Sia  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N^{tot}}$  una matrice rettangolare. La *Singular Value Decomposition* (SVD) di  $\mathbf{A}$  è una decomposizione della forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T,$$

dove  $\mathbf{U} = (u_1, \dots, u_M) \in \mathbb{R}^{M \times M}$  e  $\mathbf{V} = (v_1, \dots, v_{N^{tot}}) \in \mathbb{R}^{N^{tot} \times N^{tot}}$  sono matrici con colonne ortonormali,  $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}_n$ . Inoltre

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_{N^{tot}} \end{bmatrix}$$

è una matrice  $M \times N^{tot}$  diagonale con elementi non negativi chiamati *valori singolari*. Una convenzione comune prevede di ordinare i valori singolari in ordine decrescente. In questo modo la matrice  $\mathbf{\Sigma}$  è unicamente determinata da  $\mathbf{A}$ . Inoltre, per ogni matrice esiste unicamente una SVD, a meno di un cambio di segno nella coppia  $(u_i, v_i)$ . I vettori  $u_i$  sono chiamati *vettori singolari sinistri* e  $\mathbf{U}$  rispettivamente  $v_i$  *vettori singolari destri* di  $\mathbf{A}$ , riferiti di  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}^T$ , rispettivamente.

Rispetto al problema sotto esame, nelle figure le matrici  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{\Sigma}$  e  $\mathbf{V}$  rispettivamente.

Ogni trasformazione dello spazio può essere vista come una composizione di pura rotazione e ridimensionamento. Si prenda ora una matrice quadrata  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{M \times M}$  con determinante positivo. Per spiegare in modo più intuitivo la SVD, si prenda  $\mathbf{M}$  come una composizione di tre trasformazioni geometriche dello spazio:  $\mathbf{\Sigma}$  è una matrice che ridimensiona lo spazio,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}^T$  lo ruotano. Allora, come si vede nella figura 2.10, lo spazio viene indicato da un disco unitario definito da due vettori

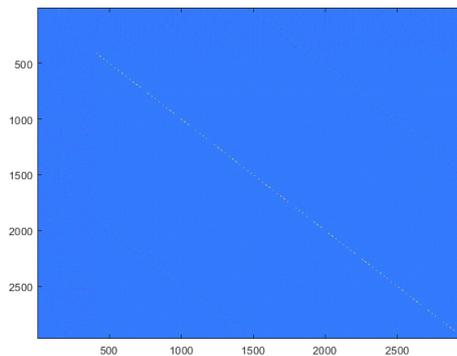


Figura 2.7: Matrice  $\mathbf{U}$

unitari e la matrice  $\mathbf{M}$  è rappresentata da un disco ruotato e "compattato". La trasformazione dello spazio può essere ottenuta anche da una rotazione data dalla matrice  $\mathbf{V}^T$ , da uno schiacciamento dato da  $\mathbf{\Sigma}$  e contraddistinto dai valori singolari e infine da un'ulteriore rotazione data da  $\mathbf{U}$ . Ponendo l'accento sui valori singolari, questi possono essere interpretati come i semiassi dell'ellisse. Inoltre, questo è valido per un numero  $N^{tot}$  di dimensioni nello spazio euclideo e anche per matrici che non sono quadrate. Se  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N^{tot}}$  con  $M \neq N^{tot}$ , i suoi valori singolari possono essere visti come i semiassi di un ellissoide a  $N^{tot}$  dimensioni in uno spazio a  $M$  dimensioni.

Il nuovo modello discreto mette in evidenza le caratteristiche dei valori singolari: i valori tendono a non fluttuare, decadono gradualmente a zero e, maggiore è la dimensione di  $\mathbf{A}$ , maggiore è il numero di valori singolari piccoli. I vettori singolari sinistri e destri tendono ad avere più cambi di segno nei loro elementi man mano che l'indice  $i$  aumenta, al diminuire di  $\sigma_i$ . Infatti, proprio  $\sigma_i$  è un indicatore della frequenza associata alla soluzione  $x$ . Inoltre, per i problemi a rango non pieno, si nota un "salto" notevole tra i valori singolari grandi e piccoli.

Per capire se il problema sotto esame è mal posto si deve guardare il diagramma dei valori singolari della matrice dei coefficienti del phantom, si veda la figura 2.11 e si noti il salto.

**Problemi ai minimi quadrati** La SVD è legata ai *problemi ai minimi quadrati*, cioè quel metodo che consente di approssimare la soluzione di un sistema sovra determinato, nel nostro caso quando la matrice dei coefficienti  $\mathbf{A}$  ha un numero di righe maggiore del numero di colonne. Nei problemi tomografici, ad eccezione di rarissimi casi, il modello discreto ha una matrice dei coefficienti tale e perciò si deve adottare un approccio dei minimi quadrati. Chiamato anche *least squares problem*, questo metodo consiste nel minimizzare la norma 2 del residuo (la differenza tra il dato osservato e il valore dato dal modello matematico) e si indica nel seguente modo

$$\min \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2. \tag{2.40}$$

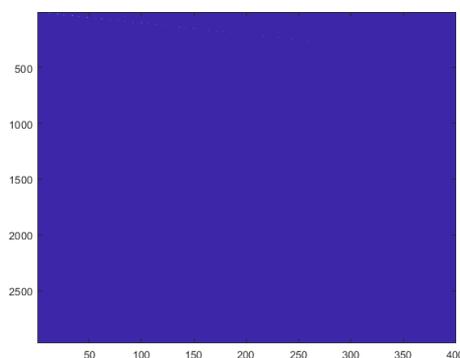


Figura 2.8: Matrice Sigma

Data la SVD di  $\mathbf{A}$ , la si indichi come combinazione lineare come è illustrato:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T = \sum_{i=1}^n u_i \sigma_i v_i^T.$$

Si scrive dunque l'inversa di  $\mathbf{A}$  (se  $\mathbf{A}$  è invertibile) come

$$\mathbf{A}^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{v_i u_i^T}{\sigma_i}$$

altrimenti la sua pseudoinversa, detta anche la *pseudoinversa di Moore-Penrose*  $\mathbf{A}^\dagger$  (se  $\mathbf{A}$  non è invertibile) come

$$\mathbf{A}^\dagger = \sum_{i=1}^{\text{rank}(\mathbf{A})} \frac{v_i u_i^T}{\sigma_i}.$$

Se la matrice non è invertibile, in particolare se  $\text{rank}(\mathbf{A}) < n = \min(m, n)$ , la soluzione del problema ai minimi quadrati rappresenta il valore minimo della norma  $2 \mathbf{x}_{LS}$  ed è quindi

$$\mathbf{x}_{LS} = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{\text{rank}(\mathbf{A})} \frac{u_i^T \mathbf{b}}{\sigma_i} v_i. \quad (2.41)$$

La *Generalized Singular Value Decomposition* (GSVD) della coppia di matrici  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{L}$  (con  $\mathbf{L} \neq \mathbf{I}$ ) è una generalizzazione della SVD di  $\mathbf{A}$ . In questo caso i valori singolari associati a  $(\mathbf{A}, \mathbf{L})$  sono le radici quadrate degli autovalori generalizzati della coppia  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A}, \mathbf{L}^T \mathbf{L})$ . Sia  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{p \times n}$  a rango pieno e  $m \geq n \geq p$ . Definendo il *nucleo* di una matrice  $\mathbf{A}$  come l'insieme dei vettori  $v$  tali che  $\mathbf{A}v = 0$  e indicandolo con  $\text{Ker}(\mathbf{A})$ , allora la coppia di matrici  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{L}$  sono tali che

$$\text{Ker}(\mathbf{A}) \cap \text{Ker}(\mathbf{L}) = \{0\}.$$

La GSVD è la seguente decomposizione di  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{L}$ :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{X}^T, \quad \mathbf{L} = \mathbf{V}\mathbf{M}\mathbf{X}^T$$

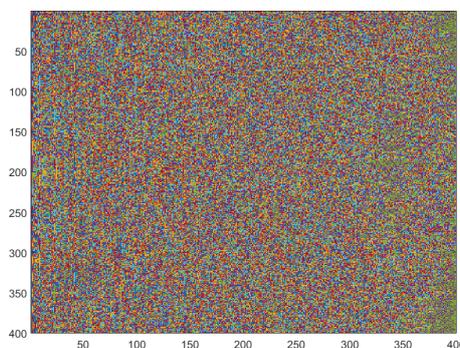


Figura 2.9: Matrice  $\mathbf{V}$



Con  $e$  l'errore, per esempio, del 1% di  $\mathbf{b}$ . Si può riscrivere quindi la 2.41 come

$$\mathbf{x}_{LS} := \mathbf{A}^\dagger \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{\text{rank}(\mathbf{A})} \frac{u_i^T \mathbf{b}_{exact}}{\sigma_i} v_i + \sum_{i=1}^{\text{rank}(\mathbf{A})} \frac{u_i^T e}{\sigma_i} v_i. \quad (2.44)$$

Questa equazione è di fondamentale importanza per capire il metodo della SVD troncata.

**TSVD** Infatti, se ci concentriamo sul secondo termine del membro a destra, notiamo che all'aumentare dell'indice  $i$  i valori singolari diminuiscono provocando un ampliamento dell'errore. La soluzione più ovvia per limitare la propagazione dell'errore, è limitare i valori singolari, quindi troncare la sommatoria che approssima la soluzione a un indice  $k$ . Si sceglie quindi un numero  $k$  di elementi della sommatoria per definire la soluzione  $\mathbf{x}_k$

$$\mathbf{x}_k = \sum_{i=1}^k \frac{u_i^T \mathbf{b}_{exact}}{\sigma_i} v_i + \sum_{i=1}^k \frac{u_i^T e}{\sigma_i} v_i. \quad k \leq \text{rank}(\mathbf{A}) \quad (2.45)$$

Cercando di minimizzare il termine legato all'errore. Sorge spontanea una domanda: come scegliere  $k$ ? Sono elencati 4 metodi utilizzati

- principio di discrepanza;
- il criterio della curva L;
- metodi statistici come il cross validation;
- confrontare le norme consecutive.

Il principio di discrepanza impone che l'indice di troncamento  $k$  rispetti la seguente

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{b}\|_2 \leq \eta \|\mathbf{b} - \mathbf{b}_{exact}\|_2.$$

Per un coefficiente  $\eta > 1$ . Se si stampano in un diagramma gli indici  $i$  e i valori singolari, si nota che la curva creata è simile a una L. Per questo motivo, il metodo della curva L consiste nell'analizzare visivamente il diagramma. I problemi mal condizionati a rango non pieno sono soliti a presentare un salto notevole nei valori

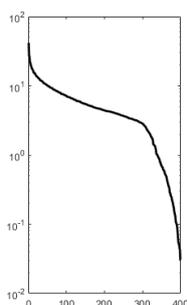


Figura 2.11: Valori singolari del phantom

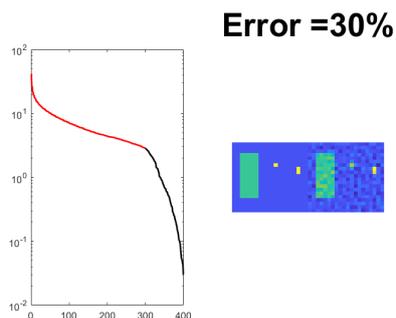


Figura 2.12: Ricostruzione del phantom per  $k=300$

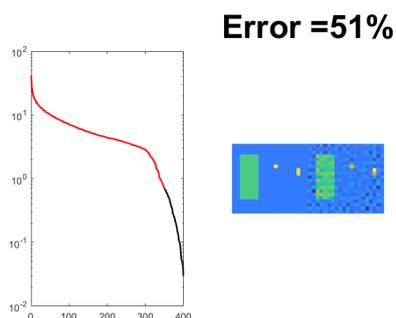


Figura 2.13: Ricostruzione del phantom per  $k=350$

singolari, ci sarà quindi una differenza  $\sigma_{i+1} - \sigma_i$  notevole rispetto alle altre differenze di valori singolari consecutivi. In questo caso, è proprio l'indice  $i$  ad essere scelto come indice massimo. Per esempio, si prenda il diagramma  $\sigma - i$  di figura 2.14, si nota che intorno all'indice 10 i valori singolari presentano un salto. Si potrebbe quindi pensare di troncare la SVD per  $k = 10$ . Se invece guardiamo al nostro phantom, basti osservare i valori singolari dalla figura 2.11 per capire dove troncare la sommatoria.

Nelle figure si vede la ricostruzione del phantom a seguito dell'applicazione della 2.45 per  $k=300$  e  $350$  e l'errore relativo ottenuto come  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)/\mathbf{x}$ .

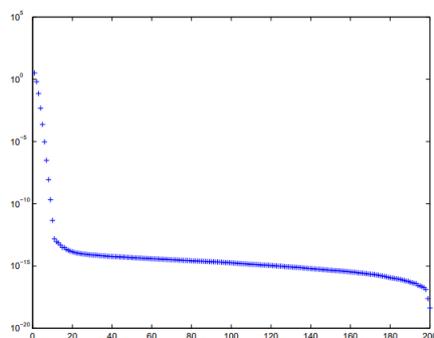


Figura 2.14: valori singolari

**Error =49%**

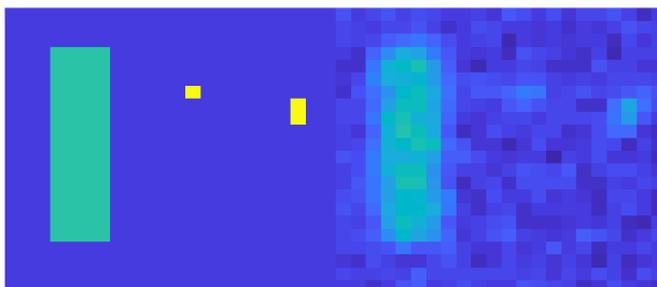


Figura 2.15: Regularizzazione di Tikhonov

**Regularizzazione di Tikhonov** Consiste nel trovare una soluzione approssimata dal seguente problema

$$\min_{\mathbf{x}} \{ \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 + \mu \|\mathbf{Lx}\|_2 \}. \quad (2.46)$$

Si nota la somiglianza con il problema ai minimi quadrati, in questo viene aggiunto un termine di regolarizzazione che pondera la soluzione in cui  $\mathbf{L}$  è una matrice di regolarizzazione simile a quella della GSVD ( $\text{Ker}(\mathbf{A}) \cap \text{Ker}(\mathbf{L}) = \{0\}$ ) e tipicamente è la matrice identità o un operatore differenziale discreto, mentre  $\mu$  è un coefficiente positivo. Si preferisce che la matrice di regolarizzazione sia  $\mathbf{L}$ . Si associa un'equazione al problema di minimizzazione di Tikhonov

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mu \mathbf{L}^T \mathbf{L}) \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (2.47)$$

che ha una soluzione univoca per ogni valore di  $\mu$ . Questo porta a pensare quanto determinare il coefficiente sia di notevole importanza e quindi si applicano dei metodi per scegliere questo coefficiente.

Si applica la regolarizzazione di Tikhonov al problema sotto esame e si sceglie come matrice di regolarizzazione la matrice identità  $\mathbf{L} = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ . Quando un problema di regolarizzazione ha la matrice di regolarizzazione uguale alla matrice identità allora il problema si dice essere in *forma standard*. I calcoli sono stati fatti con la forma standard del problema risolvendo la 2.47 in funzione di  $\mathbf{x}$  e si è scelto  $\mu = 15$ , si veda la figura 2.15.

# Capitolo 3

## Onde acustiche

Questo capitolo analizza i fondamentali concetti ed equazioni che descrivono la propagazione delle onde sonore. Inizialmente, il problema verrà trattato come monodimensionale, questo perché è bene comprendere il fenomeno della propagazione dell'onda che giace su una retta. Tuttavia, siccome la tomografia acustica avanzata, basata sui fenomeni di rifrazione, riflessione, scattering e diffrazione, necessita di un modello matematico più completo, si tratterà in un secondo momento del problema spaziale dove verranno trattate le onde piane e sferiche.

Per la prima sezione, il modello monodimensionale, è stata seguita la linea di pensiero del testo [14]. Per il modello spaziale, si sono utilizzati [5] per le equazioni delle onde acustiche nei solidi, [8] e [6] per le equazioni del campo acustico nel dominio del tempo e nel dominio delle frequenze. Per i concetti di base, quali le definizioni di grandezze, di operatori matematici e altre implementazioni, si sono utilizzati [17],

### 3.1 Modello monodimensionale

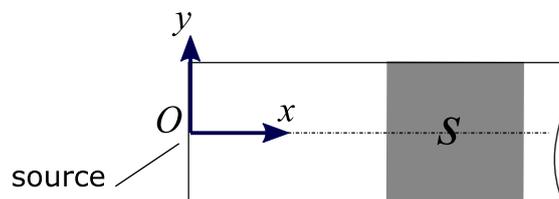


Figura 3.1: Sistema di riferimento

- Si sceglie  $O$  come origine del sistema di riferimento in cui è posta la sorgente che eccita il corpo.

- Si considera un mezzo elastico monodimensionale, omogeneo e isotropo. Tale corpo è lineare, cioè la deformazione del corpo in un punto qualsiasi è funzione solamente del tempo e della posizione rispetto alla sorgente  $O$ .
- Si considera il mezzo illimitato.
- Il corpo ha una sezione  $S$  e densità  $\rho$ , entrambe costanti.
- La sorgente  $O$  urta il corpo ad una estremità provocando delle deformazioni locali che si propagano lungo il corpo.
- Si trascurano gli smorzamenti delle vibrazioni causati dall'attrito.
- Sia  $x$  la direzione longitudinale definita dal versore  $\hat{i}$  e  $y$  quella trasversale definita dal versore  $\hat{j}$ .
- Sia  $s$  lo *spostamento* [m] della particella del mezzo rispetto alla sua posizione di riposo.

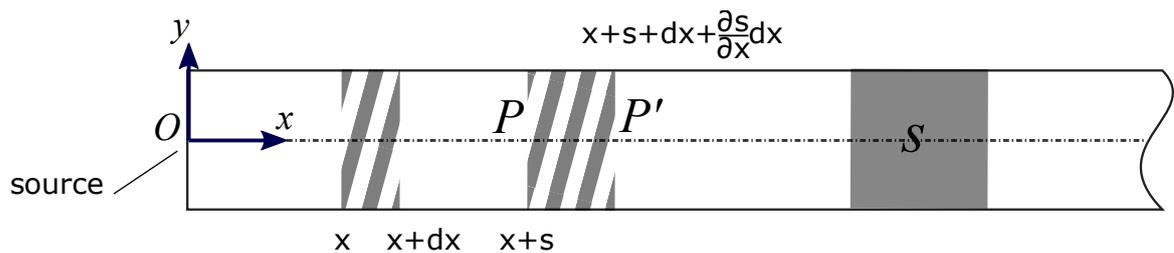


Figura 3.2: Modello monodimensionale

**Onde elastiche** Nel momento in cui la sorgente urta il corpo, lo deforma localmente e successivamente tale deformazione si propaga con velocità finita lungo il corpo. Le particelle vicine alla deformazione localizzata subiscono infatti la stessa deformazione e, a causa delle azioni intermolecolari, interessano a loro volta altre particelle. Allorché uno spostamento di particelle si trasmette in un mezzo elastico, si dice che un'onda elastica si propaga nel mezzo. Nei casi più semplici ogni punto investito dall'onda si muove di moto oscillatorio rispetto alla sua posizione di riposo e tale moto può essere descritto attraverso una legge sinusoidale. Tale aspetto verrà descritto in seguito. La velocità di propagazione delle deformazioni viene detta *velocità dell'onda* più comunemente *velocità del suono* e viene indicata con  $c$ . Non va confusa con la velocità di vibrazione di una particella, che interessa un punto oscillante. La *velocità di vibrazione*  $v$  è la velocità infinitesima con cui le particelle del fluido si muovono a causa dell'onda di pressione. Essa infatti rappresenta il  $\frac{\partial s}{\partial t}$ . Per capire meglio la differenza tra  $c$  e  $v$ , la velocità del suono "è anche la velocità con cui si propagano l'energia cinetica e le sollecitazioni meccaniche in una determinata

sostanza" [18]. Se la particella nel mezzo si muove di moto periodico attorno alla sua posizione di equilibrio, allora si definiscono le seguenti grandezze<sup>1</sup>:

- lo spostamento  $s$

$$s = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad [m]$$

con  $A, B, \omega$  costanti.

- la *pulsazione*  $\omega$  [rad/s]

- il *periodo*  $T$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad [s]$$

- la *frequenza*  $\nu$

$$\nu = \frac{1}{T} \quad [Hz]$$

- la *lunghezza d'onda*  $\lambda$

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} \quad [m]$$

- l'*ampiezza* o *spostamento massimo*  $s_m$  [m]

- L'*angolo di sfasamento*  $\varphi$  [rad] definito come la differenza di fase di leggi sinusoidali che hanno lo stesso periodo  $T$ . In particolare si vedrà in seguito come applicarla allo spostamento  $s$ .

- Il *vettore d'onda*  $\mathbf{k}$  è un vettore che ha come modulo la grandezza  $\omega/c$  e come direzione e verso quello della propagazione dell'onda. Questo è vero solo nei mezzi omogenei, in caso contrario la direzione di tale vettore è diversa.

- Il *numero d'onda*  $k$  rappresenta quante oscillazioni si compiono nell'unità di spazio

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \left[ \frac{rad}{m} \right]$$

ed è anche il modulo del vettore d'onda  $\mathbf{k}$ .

**Onde Longitudinali** Se la direzione di propagazione delle deformazioni è la stessa dell'onda, allora si parla di *onde longitudinali*. Esiste anche il caso in cui le deformazioni e le onde sono trasversali, cioè gli spostamenti delle particelle sono perpendicolari rispetto al vettore di avanzamento dell'onda. Si parlerà dunque di *onde trasversali*. Considerando le prime, si definiscono le principali equazioni di seguito.

**Equazione di propagazione in un solido** La velocità di propagazione delle perturbazioni elastiche  $c$  è direttamente proporzionale all'elasticità e inversamente alla densità del mezzo. In un solido infatti tale velocità è notevole. Basti pensare come è la percezione uditiva in un pezzo metallico. Sia il mezzo considerato una trave metallica e si studia lo spostamento  $s$  lungo la mezzeria. Si consideri un tratto

---

<sup>1</sup>Queste grandezze valgono anche per il modello spaziale.

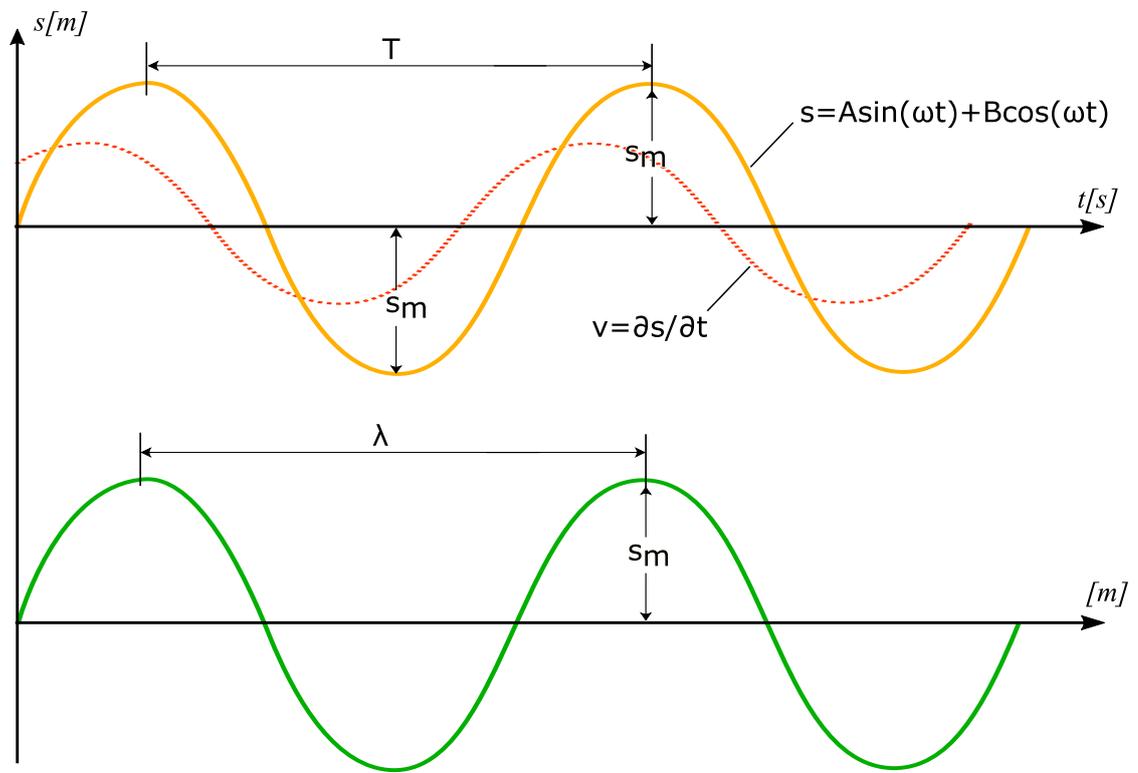


Figura 3.3: Diagramma delle onde sinusoidali

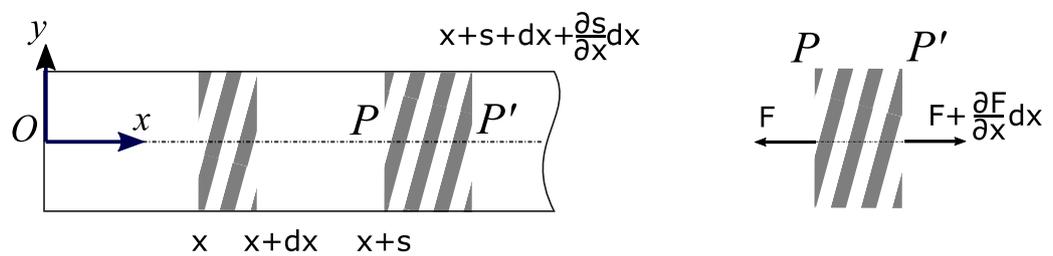


Figura 3.4: Onde in un solido monodimensionale

infinitesimo di trave a riposo di coordinate  $x$  e spessore  $dx$  e lo stesso tratto dopo l'urto generato dalla sorgente  $O$  in una certo istante  $t$ : questo tratto infinitesimo avrà coordinate  $x+s$  e spessore  $dx + \frac{\partial s}{\partial x} dx$ , si indica per semplicità con  $PP'$ . Il tratto studiato presenta un allungamento relativo a  $dx$  pari a  $\frac{\partial s}{\partial x}$ , questo significa che questa deformazione elastica, chiamata anche  $\varepsilon$ , è provocata da una forza agente sul tratto in esame. Tale forza vale:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx = E \cdot S \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx,$$

con  $E$  *modulo di Young*. Con l'equilibrio dinamico si perviene alle seguenti relazioni. Posto che il tratto  $PP'$  ha massa infinitesima  $dm = \rho S dx$

$$a = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2},$$

$$dF = a \cdot dm,$$

$$E \cdot S \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \rho S \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}.$$

Da cui dopo dei passaggi banali si ricava la legge della propagazione dello spostamento in funzione di  $x$  e di  $t$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}. \quad (3.1)$$

. Poichè essa è omogenea, ricaviamo che la *velocità del suono in un solido* vale

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (3.2)$$

Per dimostrare quanto sia notevole la velocità nei solidi, basti pensare che  $E$  è dell'ordine di 215 GPa per gli acciai. Ipotizzando dunque  $\rho \cong 8000 \frac{Kg}{m^3}$ , si ottiene  $c \cong 5200 \frac{m}{s}$ . Si ricorda che nell'aria  $c \cong 330 \frac{m}{s}$ .

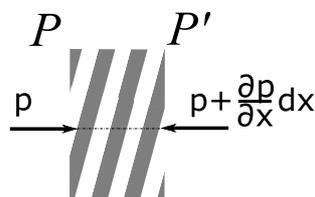


Figura 3.5: Onde in un fluido monodimensionale

**Equazione di propagazione in un fluido** Similmente si applicano le stesse considerazioni nel caso in cui il mezzo è un fluido. Al passaggio di un'onda elastica un volume infinitesimo di fluido  $\rho S dx$  subisce uno spostamento  $s$  e studiando un tratto infinitesimo  $dx$  contenente il volume, si definiscono le deformazioni volumetriche causate dalla propagazione della deformazione. Si arriva a un'espressione comparabile con quella del caso solido. Si definisce la *pressione acustica*  $p$  come la differenza algebrica tra la pressione puntuale  $p(t)$  e la pressione a riposo  $p_0$  nello stesso punto.

All'istante  $t$  la pressione agente nel tratto  $PP'$  contenente il volumetto di fluido vale  $p = \frac{\partial p}{\partial x}$  e imponendo l'equilibrio dinamico

$$S \cdot \frac{\partial p}{\partial x} dx = -\rho S \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} dx.$$

Rispetto alla condizione imperturbata del fluido, il tratto  $PP'$  analizzato presenta una *variazione di volume*  $\theta$  che, ipotizzando la sezione  $S$  costante, corrisponde a  $\frac{\partial s}{\partial x}$ . Il coefficiente di compressibilità  $\chi$  di un fluido è dato da

$$\chi = -\frac{\theta}{p} = -\frac{1}{p} \frac{\partial s}{\partial x}.$$

Se ne deduce quindi

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\chi} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2},$$

che insieme all'equazione dell'equilibrio porta a

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi \rho} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}.$$

L'equazione di propagazione dello spostamento è facilmente confrontabile con la equazione corrispondente nel caso di mezzo solido. La *velocità del suono in un fluido* varrà similmente

$$c = \sqrt{\frac{1}{\chi \rho}}. \quad (3.3)$$

**Legge della pressione acustica** In un fluido la pressione acustica, proprio come lo spostamento, è funzione del tempo e dello spazio. A seguito in una perturbazione acustica l'onda di pressione si propaga con la stessa legge di propagazione dello spostamento nei fluidi. Ricordando la definizione di pressione acustica  $p = p(t) - p_0$ , allora

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\chi \rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (3.4)$$

Questa è anche chiamata *equazione delle onde acustiche monodimensionali* e fu derivata nel 1747 da d'Alambert per il caso di corde vibranti. Egli stesso riconobbe la validità di tale legge anche per la propagazione del suono nell'aria.

**Onde longitudinali periodiche** Non sempre la perturbazione in un mezzo elastico si limita a uno spostamento  $s$  di breve durata ma può avere un moto vibratorio periodico. La sorgente può generare delle vibrazioni che si ripetono con un periodo  $T$ . Un esempio sono le molle delle valvole dei motori automobilistiche messe in compressione dalle camme con un moto periodico. Tutti i punti del mezzo entrano in vibrazione assumendo lo stesso moto della sorgente. Si suppone la sorgente si muova di moto sinusoidale definito da

$$s = s_m \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

e soddisfa l'equazione di propagazione dello spostamento, che si definisce come *equazione dell'onda progressiva*

$$s = s_m \sin \left( \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{c} \right) \right)$$

o, tenendo conto della lunghezza d'onda  $\lambda$ ,

$$s = s_m \sin \left( 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right).$$

Un'onda si può rappresentare con una funzione esponenziale sfruttando la corrispondenza tra moti sinusoidali e funzioni esponenziali di variabile complessa. Nel caso della funzione precedente si ottiene

$$s = s_m e^{2\pi i \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)}.$$

**Impedenza acustica** Si parla di seguito di una grandezza che riassume tutte le perdite di energia dovute ad attrito di tipo viscoso, cioè alle forze che si oppongono allo scorrimento delle molecole del fluido in modo direttamente proporzionale alla velocità del flusso. In senso meccanico la resistenza è stata introdotta come proprietà dei circuiti elettrici da Heaviside come il rapporto tra tensione e corrente elettrica, generalizzando il concetto di resistenza elettrica nei circuiti AC. In ambito acustico fu invece introdotta da A. G. Webster nel 1914. L'*impedenza acustica specifica*  $R_s$ , definito per la prima volta da Kennel e Kurokawa nel 1921, è il rapporto tra pressione acustica  $p$  e velocità delle particelle  $v$ .

$$R_s = \frac{p}{v} = \rho c \quad \left[ Pa \cdot \frac{s}{m} \right]$$

L'*impedenza acustica*  $R$  rappresenta la tendenza di un corpo a opporsi al passaggio delle onde sonore e si misura come l'impedenza acustica specifica sull'area che l'onda investe

$$R = \frac{R_s}{S} = \frac{p}{vS} \quad \left[ Pa \cdot \frac{s}{m^3} \right]$$

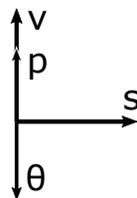


Figura 3.6: Vettori di Fresnel

**Vettori di Fresnel per un mezzo fluido** Consentono di rappresentare le grandezze dell'onda tramite dei vettori posti nel seguente modo: il vettore  $s$  ha la direzione dello spostamento. Essendo il caso monodimensionale, tale vettore giace su

Figura 3.7: Modello di solido monodimensionale

una retta. Perpendicolari a esso giacciono i vettori velocità di vibrazione  $v$ , pressione acustica  $p$ , deformazione volumetrica  $\theta$ . Qualora le onde fossero sinusoidali si avrebbe la seguente rappresentazione

$$\begin{aligned} v &= v_m \frac{2\pi}{T} \cos \left( 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right), \\ \theta &= -\theta_m \frac{2\pi}{T} \cos \left( 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right), \\ p &= p_m \frac{2\pi}{T} \cos \left( 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right). \end{aligned}$$

Si nota che  $p$ ,  $\theta$ , e  $v$  sono in controfase rispetto allo spostamento  $s$ .

**Onde trasversali** Come accennato, le onde trasversali in un mezzo isotropo e lineare sono definite dagli spostamenti perpendicolari alla direzione di propagazione dell'onda. Si analizzano questo tipo di onde solamente nei solidi in quanto nei fluidi il fenomeno è presente solo se perfettamente viscosi. Riprendiamo l'asta rigida infinita come corpo di riferimento e sia un tratto infinitesimo definito da due sezioni rette  $MNe M'N'$  di ascisse  $x$  e  $x + dx$  e area  $S$ . Le onde trasversali sollecitano il tratto  $MNM'N'$  a muoversi lungo la direzione  $Oy$  inducendo delle forze di taglio  $T$  e coppie flessionali  $C$  nelle sezioni considerate. Se imponiamo l'equilibrio statico del tratto così che

$$T dx = -\frac{\partial C}{\partial x} dx,$$

con  $C = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{EI}{r}$  la coppia flettente agente su  $MN$  definita dal modulo di Young  $E$ , il momento di inerzia  $I$  e il raggio di curvatura  $r$  della fibra neutra. L'equazione della dinamica dà:

$$T' - T = \rho S \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx.$$

Per tratti infinitesimi  $T' - T = \frac{\partial T}{\partial x} dx = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}$

$$\rho S \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

Questa equazione si può risolvere cercando una soluzione rispetto a  $y$  sotto forma di un'onda sinusoidale  $y = y_m \sin(2\pi\nu(t - x/c'))$  da cui sostituendo ricaviamo la *velocità del suono trasversale*  $c'$

$$c' = 2\pi\nu \sqrt{\frac{EI}{\rho}}, \quad (3.5)$$

ponendo il raggio d'inerzia della sezione  $R = \sqrt{\frac{I}{S}}$  e ricordando che  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  e l'ampiezza dell'onda  $\lambda = c/\nu$

$$c'^2 = c^2 \frac{2\pi r}{\lambda},$$

da cui si nota che l'onda trasversale è sempre molto più lenta dell'onda longitudinale.

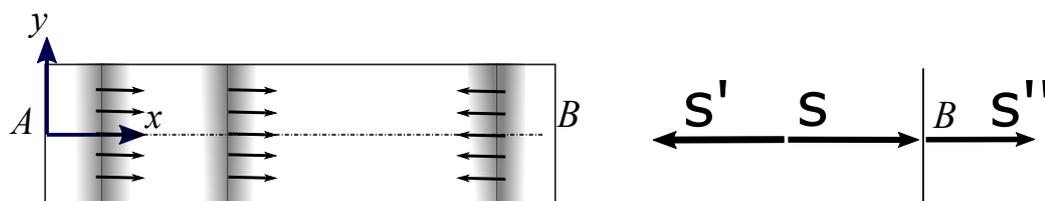


Figura 3.8: Vettori spostamento incidente, di trasmissione e di riflessione

**Riflessione e trasmissione** Qualora l'onda viaggi su un mezzo monodimensionale limitato o incontri un ostacolo si verificano degli effetti di riflessione e trasmissione. Si prenda ora l'esempio di un una trave finita di estremi A e B, A è la sorgente e la deformazione si propaga in senso inverso quando arriva in B. In certi casi l'onda si propaga anche oltre l'estremità costituendo un'onda trasmessa. Può inoltre accadere che lo spostamento  $s$  dell'onda incidente si divida parzialmente in  $s'$  dell'onda riflessa e  $s''$  dell'onda trasmessa. Osservando le onde in B, gli spostamenti hanno le seguenti equazioni

$$\begin{aligned} s &= s_i \sin(2\pi vt + \varphi), \\ s' &= s_r \sin(2\pi vt + \varphi'), \\ s'' &= s_t \sin(2\pi vt + \varphi''), \end{aligned}$$

dove con  $s_i$ ,  $s_r$ ,  $s_t$  si sono indicate le ampiezze delle onde incidenti, riflesse e trasmesse, rispettivamente, e con  $\varphi$ ,  $\varphi'$ ,  $\varphi''$  gli sfasamenti delle stesse. Il materiale di cui è fatta la trave ha una resistività acustica specifica  $R_1$  e il mezzo su cui l'onda si trasmette  $R_2$ . Per l'onda trasmessa si considera  $\varphi'' = \varphi$  e si indica un *fattore di trasmissione*  $t_r$  definito come il rapporto tra il flusso di energia acustica trasmessa e incidente

$$t_r = \frac{4R_1R_2}{(R_1 + R_2)^2};$$

per l'onda riflessa similmente si indica con  $r_f$  il *fattore di riflessione*

$$r_f = \left( \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \right)^2.$$

## 3.2 Modello spaziale

lo spazio:

- $O$  è la sorgente puntiforme che genera onde sferiche.
- $O$  è anche origine del sistema di riferimento cartesiano.
- Il mezzo che è investito dall'onda è continuo, omogeneo e isotropo.

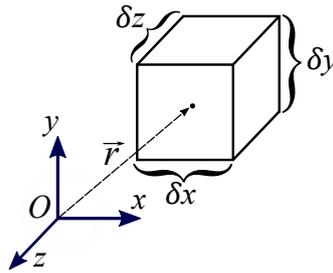


Figura 3.9: Modello spaziale

- Nel mezzo si individua un volume infinitesimo definito da un parallelepipedo di lati  $\delta x$ ,  $\delta y$  e  $\delta z$  e volume  $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ .
- La posizione della particella nel mezzo è definita dal vettore posizione  $\mathbf{r}$ .
- Lo spostamento della particella rispetto alla sua posizione di riposo è dato dal vettore  $\mathbf{s}$ .

Si richiamano di seguito gli operatori utili a comprendere le equazioni nello spazio:

- Se  $\mathbf{F}$  è un campo vettoriale, allora  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  è la *divergenza* di  $\mathbf{F}$ .
- Se  $f$  è una funzione reale di una o più variabili reali,  $\nabla f$  è il *gradiente* di  $f$ . Nel caso del sistema di riferimento utilizzato si ha  $f = f(x, y, z)$  e  $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$ .
- Se  $f$  è una funzione reale di una o più variabili reali,  $\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f$  è il *laplaciano* di  $f$ . Nel caso del sistema di riferimento utilizzato si ha  $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ .
- Se  $f$  è una funzione reale definita nello spazio-tempo tale che  $f = f(x, y, z, t)$ ,  $\square f$  è l'*operatore dalembertiano* o l'*operatore delle onde* di  $f$ . Sia  $c$  la velocità dell'onda, allora il dalembertiano si definisce come:

$$\square f = \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f.$$

**Equazione delle onde** Si definisce l'*equazione delle onde*

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p = 0 \quad (3.6)$$

che si ottiene similmente all'equazione del campo acustico ma considerando lo spazio planare. La velocità dell'onda longitudinale nei fluidi vale, come nel caso monodimensionale,  $c = \sqrt{\frac{1}{\rho \chi}}$ .

**Equazione di propagazione in un solido** Si considera come mezzo in esame un solido definito dalle seguenti grandezze e relazioni:

- Modulo di elasticità longitudinale di Young  $E$ .
- Modulo di elasticità tangenziale  $G$ .
- Coefficiente di Poisson  $\nu$ . Si ricorda che  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ .
- Il tensore degli sforzi  $\sigma$
- Il vettore spostamento  $\vec{s}$  ha tre componenti nello spazio  $s_x, s_y, s_z$  lungo gli assi cartesiani. Gli allungamenti relativi agli assi principali sono

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial s_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial s_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial s_z}{\partial z}$$

mentre le deformazioni trasversali sono

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \right)$$

e con le restanti definite similmente. Si può scrivere in forma matriciale il tensore delle deformazioni  $\varepsilon$  definito come

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

- Il parallelepipedo  $\delta V$  è sottoposto in ogni faccia a sforzi di taglio e sforzi longitudinali descritti dal tensore degli sforzi  $\sigma$ .
- $\alpha$  e  $\beta$ : due costanti, chiamate *costanti di Lamè*, una coppia di parametri dipendenti dal materiale che compaiono nella relazione tra deformazione e tensione interna per un corpo continuo esteso nello spazio.
- Campo della velocità  $\mathbf{v}$ .
- tensore degli sforzi di un materiale sottoposto solamente a onde di compressione:

$$\sigma(\mathbf{r}, t) = \mathbf{I}\alpha(\mathbf{r})\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + 2\beta\nabla\mathbf{v}$$

dove  $\mathbf{I}$  è la diade unitaria o traccia  $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ .

Il fenomeno della propagazione acustica in un solido è più complesso rispetto ai fluidi. Ogni piccola deformazione produce una reazione elastica longitudinale ha una velocità ben distinta da quella trasversale. Inoltre queste non sono le stesse del caso di onda piana perché, come si vedrà, si deve tener conto dei moduli elastici tangenziali del mezzo. Preso il solito parallelepipedo all'interno del solido, al passaggio di un'onda longitudinale non ci saranno soltanto forze di flessione e trazione come nel caso monodimensionale ma anche forze tangenziali causate dalla coesione con il materiale esterno alle facce. Ancora, al passaggio di un'onda trasversale le facce non sono sottoposte solo a flessione, come nel caso della trave monodimensionale,

ma anche a torsione. Se si indica con  $c$  la velocità longitudinale e con  $c'$  quella trasversale, si definisce la *velocità di propagazione dell'onda longitudinale in un mezzo solido nello spazio* con

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}}$$

mentre la *velocità di propagazione dell'onda trasversale in un mezzo solido nello spazio* vale

$$c' = \sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

Oltre a queste onde che attraversano il corpo "dall'interno", se il mezzo ha dimensioni finite si osservano altri fenomeni: le onde che si propagano lungo una superficie libera si chiamano appunto *onde di superficie* ma non verranno trattate in questa tesi.

**Equazione del campo elastico nei solidi** In generale, se il mezzo è solido vale

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \sigma, \quad (3.8)$$

ma se si considerasse ora un materiale non omogeneo inserito in un mezzo omogeneo di densità  $\rho_0$  e costanti di Lamè  $\alpha_0$  e  $\beta_0$ , lo spostamento dell'onda è caratterizzato dalle funzioni di fluttuazione  $\gamma_\alpha$ ,  $\gamma_\beta$  e  $\gamma_\rho$  definite come

$$\gamma_\alpha = \frac{\alpha(\mathbf{r}) - \alpha_0}{\alpha_0 + 2\beta_0}, \quad \gamma_\beta(\mathbf{r}) = \frac{\beta(\mathbf{r}) - \beta_0}{\alpha_0 + 2\beta_0}, \quad \gamma_\rho(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r}) - \rho_0}{\rho_0}.$$

**Equazione di propagazione in un fluido** Ipotizzando che un'onda sia generata dalla sorgente  $O$  e che essa si propaghi radialmente in un corpo fluido omogeneo e isotropo illimitato, si cerca l'equazione del moto dello spostamento  $s$ . Poichè le onde sono sferiche,  $s$  è radiale e tutti i punti posti alla distanza  $r$  dall'origine subiscono lo stesso spostamento. Si riprende il ragionamento fatto in precedenza sui fluidi per un'onda piana che ha portato a stabilire l'equazione di propagazione. La velocità dell'onda vale come nel caso di onde piane, quindi  $c$  è uguale alla . Preso un elemento di volume  $ABCD$  compreso tra due sfere concentriche centrate in  $O$ , di raggi  $r$  e  $r + dr$ , lo si fa investire da un'onda acustica longitudinale diretta radialmente e se ne misura la deformazione volumetrica  $\theta$ . Il punto  $A$  subirà uno spostamento pari a  $s$  mentre il punto  $B$  subirà uno spostamento pari a  $s + \left(\frac{\partial s}{\partial r}\right) dr$ . La variazione longitudinale relativa a  $dr$  vale

$$\frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\partial s}{\partial r}.$$

La variazione trasversale subita nello stesso tempo vale

$$\frac{A'C' - AC}{AC} = \frac{s}{r},$$

la deformazione volumetrica  $\theta$  vale

$$\theta = \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{2s}{r},$$

dall'equazione dello spostamento si ricava

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} &= \frac{1}{\chi\rho} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} &= \frac{1}{\chi\rho} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} &= \frac{1}{\chi\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{2s}{r} \right).\end{aligned}\tag{3.9}$$

Per trovare una soluzione a questa si riconduce l'ultima equazione alla forma omogenea introducendo una variabile  $g$  tale che

$$s = -\frac{\partial g}{\partial r},$$

cosicché diventa

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} &= \frac{1}{\chi\rho} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial g}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial^2 (gr)}{\partial t^2} &= \frac{1}{\chi\rho} \frac{\partial^2 (gr)}{\partial r^2}.\end{aligned}$$

Questa ha la forma di un'equazione omogenea di cui è nota la soluzione per  $gr$ . Sapendo che  $s = -\frac{\partial g}{\partial r}$ , con qualche passaggio si arriva alla seguente equazione dello spostamento per sole onde divergenti (che si allontanano dalla sorgente)

$$s = \frac{1}{r^2} f_o \left( t - \frac{c}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} f_o \left( t - \frac{r}{c} \right)\tag{3.10}$$

con  $f_o$  una funzione qualunque. Se  $f_o$  è una funzione sinusoidale del tempo ci si riconduce all'equazione delle onde longitudinali periodiche. Con lo stesso ragionamento

$$f_o = A \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{r}{c} \right) = A \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right).\tag{3.11}$$

**Equazione del campo per i fluidi** Siano

- Vettore velocità delle particelle  $v(\mathbf{r}, t)$  associato al campo vettoriale delle velocità  $\mathbf{v}$ .
- Vettore densità della forza  $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$  definito come la forza applicata sull'unità di volume in un certo punto  $\mathbf{r}$  ad un istante  $t$ . E' associato a un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  che rappresenta il flusso della forza idrostatica all'interno della massa.
- Campo scalare della pressione  $p$ .
- Deformazione volumica  $\theta$ .
- Velocità di deformazione del volume relativo  $h$  uguale a  $\frac{1}{\delta V} \left( \frac{d}{dt} \delta V \right)$ .
- Vettore momento di una particella  $j(\mathbf{r}, t)$ .

Le equazioni lineari che governano l'onda acustica nello spazio, senza differire tra mezzo solido e fluido come nella sezione precedente, sono l'equazione nella forma Euleriana del momento di Cauchy definito nel punto del continuo di Cauchy derivante dalla conservazione del momento.

$$\frac{\partial j(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\nabla p(\mathbf{r}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{r}, t).$$

Dall'equazione di conservazione della massa, la variazione puntuale del volume.

$$\frac{\partial \theta(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot v(\mathbf{r}, t) + h(\mathbf{r}, t).$$

Le equazioni costitutive che descrivono il comportamento del corpo investito da un'onda acustica legano la velocità della particella  $v(\mathbf{r}, t)$  con la pressione  $p(\mathbf{r}, t)$  di tale particella. Secondo la legge di Hooke, in un mezzo acustico la dilatazione  $\theta$  è proporzionale alla pressione scalare  $p$  della particella con una costante, la compressibilità o comprimibilità adiabatica  $\chi$ :

$$\theta = -\chi(\mathbf{r})p(\mathbf{r}, t),$$

si noti che  $\chi$  dipende solamente dalla posizione. Il momento  $j(\mathbf{r}, t)$  è legato alla velocità  $v(\mathbf{r}, t)$  attraverso la densità del materiale:

$$j = \rho(\mathbf{r})v(\mathbf{r}, t).$$

Combinando le equazioni sopra riportate arriviamo alle seguenti

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}, t) - \rho(\mathbf{r})\chi(\mathbf{r})\frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial v(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot \nabla \rho(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) + \rho(\mathbf{r})\frac{\partial h(\mathbf{r}, t)}{\partial t},$$

$$\nabla^2 \cdot v(\mathbf{r}, t) - \rho(\mathbf{r})\chi(\mathbf{r})\frac{\partial^2 v(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot \nabla \kappa(\mathbf{r}) = -\nabla h(\mathbf{r}, t) - \chi(\mathbf{r})\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}.$$

Per un mezzo omogeneo  $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho$ ,  $\chi(\mathbf{r}, t) = \chi$ , cioè non dipende dalla posizione nel mezzo ed è stazionario.  $\nabla \rho = \nabla \kappa = 0$ .

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}, t) - \rho\chi\frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) + \rho\frac{\partial h(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (3.12)$$

$$\nabla^2 \cdot v(\mathbf{r}, t) - \rho\chi\frac{\partial^2 v(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -\nabla h(\mathbf{r}, t) - \chi\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (3.13)$$

La prima è una forma dell'equazione di D'Alambert. Si possono rappresentare queste equazioni sul dominio di Fourier applicando la trasformata di Fourier. Si indica con  $P$  la trasformata di  $p$ ,  $V$  la trasformata di  $v$ ,  $\tilde{F}$  la trasformata di  $\mathbf{f}$  e  $\tilde{h}$  quella di  $h$ .

$$\nabla^2 P(\mathbf{r}, \omega) + \omega^2 \rho\chi P(\mathbf{r}, \omega) = \nabla \cdot \tilde{F}(\mathbf{r}, \omega) - i\omega\rho\tilde{h}(\mathbf{r}, \omega), \quad (3.14)$$

$$\nabla^2 \cdot V(\mathbf{r}, \omega) + \omega^2 \rho\chi V(\mathbf{r}, \omega) = -\nabla \tilde{h}(\mathbf{r}, \omega) + i\omega\chi\tilde{F}(\mathbf{r}, \omega). \quad (3.15)$$

**Potenziale di velocità** Si introduce una grandezza detta *potenziale di velocità*  $\phi$  legata alla velocità di vibrazione della particella  $v$  definita come

$$v = -\frac{\partial\phi}{\partial r} \quad (3.16)$$

e similmente alla funzione  $gr$  essa soddisfa un'equazione omogenea del secondo ordine, richiamando la 3.2:

$$\frac{\partial^2(\phi r)}{\partial t^2} = \frac{1}{\chi\rho} \frac{\partial^2(\phi r)}{\partial r^2}$$

che per un'onda divergente e sinusoidale ha soluzione

$$\phi = \frac{B}{r} \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)\right), \quad (3.17)$$

richiamando la 3.9 si può mettere in relazione  $\phi$  con  $p$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\chi\rho} \frac{\partial\theta}{\partial x}$$

da cui

$$p = -\frac{\theta}{\chi} = \rho \frac{\partial\phi}{\partial t}.$$

**Riflessione** Si considera il caso in cui un'onda piana urti una parete rigida illimitata con impedenza acustica infinita. Se superficie e direzione di propagazione dell'onda sono perpendicolari tra loro allora siamo nel caso monodimensionale discusso nella sezione precedente. La parete è individuata dagli assi  $X$  e  $Y$  e in  $Y = 0$  un'onda longitudinale incide la superficie con un angolo  $\vartheta_i$  alla normale e viene *totalmente* riflessa con un angolo  $\vartheta_r$ . Si dimostra che per onde longitudinali questi due angoli sono uguali. Oltre all'onda longitudinale viene riflessa anche un'onda trasversale che forma un angolo  $\Psi_r$  con la normale la cui direzione di propagazione è ovviamente perpendicolare. Per ricavare il valore di  $\Psi_r$  si utilizza la seguente relazione:

$$\frac{\sin \Psi_r}{\sin \vartheta_r} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha + 2\beta}}.$$

con  $\alpha$  e  $\beta$  costanti di Lamè del mezzo in cui si propagano le onde.

## Capitolo 4

# Tomografia di diffrazione

La tomografia di diffrazione è un metodo di ricostruzione dell'immagine interna di un materiale disomogeneo che si avvale delle proprietà di diffrazione del materiale stesso. Questo metodo si usa quando l'ampiezza d'onda  $\lambda$  del segnale sonda ha lo stesso ordine di grandezza dell'oggetto sotto esame, detto *scatterer*. Si utilizza perché la tomografia di trasmissione è inefficace sotto la precedente condizione. La differenza di natura pratica consiste nel modo in cui viene cercata la soluzione: la tomografia di trasmissione è basata su una ricostruzione esatta, mentre quella di diffrazione si basa interamente su approssimazioni della soluzione, necessarie a causa dei problemi di scattering. In altre parole, gli algoritmi di ricostruzione nella tomografia di trasmissione, o proiezione, ci consentono di ricostruire la sezione di un oggetto a partire da una sequenza di proiezioni. La soluzione in questo caso, anche se non è corretta, è esatta. Nella tomografia di diffrazione la struttura interna si ottiene da una approssimazione dell'equazione del campo di diffrazione. Per quanto verrà solamente trattato il caso bidimensionale, è da ricordare che le tecniche presentate possono essere estese anche a tre dimensioni.

Ogni disomogeneità spaziale o temporale porta a fenomeni di scattering. Fluttuazioni di densità, di comprimibilità e viscosità producono scattering di diverse angolature e quindi, in teoria, possono essere identificate a seconda delle direzioni dello scattering. Inoltre, a seconda della disomogeneità, vi è una riduzione in intensità sonora in relazione al differenziale della forza, alla derivata seconda della pressione o alla velocità di vibrazione. Una piccola fluttuazione di densità in confronto alla lunghezza d'onda comporta uno sfasamento dell'ampiezza del segnale acustico. Questo perché i piccoli punti di densità disomogenea diventano delle sorgenti sonore. Similmente nelle zone con comprimibilità non omogenea, si creeranno delle sorgenti sonore perché il materiale si espanderà e contrarrà in modo diverso rispetto al materiale adiacente. Ancora più complessi sono le sorgenti sonore date dalle discontinuità di viscosità.

In questo capitolo si osserverà la distribuzione in due dimensioni delle ampiezze delle onde sonore che si propagano attraverso il mezzo in esame e gli algoritmi per ricostruire le proprietà del mezzo, come la densità, la viscosità e la comprimibilità. Nel capitolo precedente si è visto che i modelli matematici che descrivono il moto dipendono dalle caratteristiche del mezzo, per esempio se è solido o liquido, omogeneo

o disomogeneo. Questo capitolo segue principalmente il pensiero di [5]. Tuttavia si consiglia di consultare il lavoro di Devaney, che ha sviluppato per primo i metodi di inversione per la tomografia di diffrazione, in particolare si veda [2],[7], [3] e [4]. La parte introduttiva è stata scritta seguendo le linee guida di [12], [5] e le equazioni delle onde sono state prese seguendo [5] e [6].

## 4.1 Modello matematico

**Problema inverso con scattering** Viene definito, a seguito dell'introduzione del *Journal of Inverse Problems (1984)*, il *problema inverso con scattering* come la soluzione del problema di una equazione a derivate parziali lineare disomogenea del tipo

$$\hat{D}u(\mathbf{r}, t) = \hat{L}u(\mathbf{r}, t) \quad (4.1)$$

in cui  $u$  è generalmente la grandezza associata al campo di onde (in questo caso il campo di onde con scattering),  $\hat{D}$  è un operatore generico differenziale omogeneo e  $\hat{L}$  è un operatore differenziale disomogeneo. Il problema diretto consiste nel calcolare  $u(\mathbf{r}, t)$  dato  $\hat{D}$  e  $\hat{L}$  mentre il problema inverso consiste nel calcolare la caratteristica disomogeneo di  $\hat{L}$  dato il campo  $u(\mathbf{r}, t)$ . Per risolvere questo problema si utilizzerà una appropriata *funzione di Green* in modo tale che

$$u(\mathbf{r}, t) = \hat{I}\hat{L}u(\mathbf{r}, t) \quad (4.2)$$

dove  $\hat{I}$  è un operatore integrale che comprende la funzione di Green.

**Funzione di Green** Chiamate così dal matematico George Green (Nottingham, 1793), sono state introdotte inizialmente per analizzare matematicamente le teorie dell'elettricità e del magnetismo. Trova applicazioni anche in acustica alla fine del XIX secolo nella risoluzione di equazioni di derivate parziali, soprattutto quelle disomogenee. I risultati delle funzioni di Green sono la trasformazione di una rappresentazione di un fenomeno fisico tramite una equazione differenziale parziale in una rappresentazione integrale. I termini dell'integrale sono composti, parzialmente o integralmente, dalle funzioni di Green associate all'equazione differenziale. In questa tesi la funzione di Green si indicherà con  $G$ .

**Equazione di Helmholtz** L'*equazione di Helmholtz* deriva dal d'alambertiano di una funzione ed è definita cercando soluzioni che abbiano una dipendenza armonica dal tempo, cioè variabili nel tempo in modo sinusoidale, così da eliminare la dipendenza dal tempo. Infatti, a differenza dalla forma di d'Alambert, in essa viene utilizzato il vettore d'onda  $\mathbf{k}$ . Si procede con il metodo di separazione delle variabili prendendo una  $g$  funzione fattorizzabile, cioè definibile come  $g = A(x, y, z)B(t)$ , sostituendo nell'equazione delle onde e poi semplificando

$$\frac{\nabla^2 A}{A} = \frac{1}{c^2 B} \frac{d^2 B}{dt^2}.$$

Il termine a sinistra dipende solamente dallo spazio e quello a destra dipende solamente dal tempo. Grazie alla separazione delle variabili si può dire che la validità

dell'equazione è data se e solo se entrambi i membri sono uguali a una costante. Si sceglie, per semplicità nella soluzione

$$\frac{\nabla^2 A}{A} = -k^2,$$

$$\frac{1}{c^2 B} \frac{d^2 B}{dt^2} = -k^2.$$

Banalmente, dalla prima otteniamo l'equazione di Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2 I)A = 0. \quad (4.3)$$

La cui soluzione dipende dalle condizioni al contorno.

**Equazione disomogenea di Helmholtz** L'equazione disomogenea di Helmholtz in  $R^n$  ha la forma:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 I \right) A(x) = -t(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (4.4)$$

dove  $t : R^n \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione a supporto compatto. Questa equazione descrive il comportamento di onde stazionarie, cioè con lunghezza d'onda costante generate dalla sorgente  $-t(x)$ . Per trovare una soluzione a questa equazione si definiscono le condizioni al contorno all'infinito, cioè due soluzioni che tendono a zero all'infinito, rappresentanti la radiazione uscente ed entrante. Questa condizione al contorno è detta *condizione di radiazione di Sommerfeld*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{n-1}{2}} \left( \frac{\partial}{\partial |r|} - ik \right) A(x\hat{i}) = 0.$$

Grazie a questa condizione si può ricavare la soluzione dell'equazione non omogenea di Helmholtz utilizzando la funzione di Green. Fisicamente la funzione di Green associata al problema del campo delle onde rappresenta il modo in cui le onde si propagano da un punto spazio in un altro. Per questo motivo, le funzioni di Green sono riferite alla propagazione delle onde e sono funzione della distanza dalla sorgente  $|x - x_0|$ , per questo motivo si usa la notazione

$$x|x_0 \equiv |x - x_0|.$$

Si fa riferimento alla 4.1 dove l'operatore differenziale è il d'alambertiano e l'operatore disomogeneo è il termine  $-t(x)$  che indica il termine della sorgente. Si sostituisce questo termine con un punto nello spazio  $x_0$  nel seguente

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \right) G(x|x_0, k) = -\delta(x - x_0). \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Ricordando una proprietà fondamentale della  $\delta$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(x)\delta(x - x_0)dx = A(x_0),$$

si ottiene la soluzione per l'equazione disomogenea

$$A(x_0, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} t(x)G(x|x_0, k)dx. \quad (4.5)$$

o anche

$$A(x) = (G * t)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x - y)t(y)dy.$$

Ovvero  $A(x)$  è uguale alla convoluzione di  $G$  su  $t$ . La funzione di Green più importante per studiare la tomografia è quella in 2D, di seguito si troverà la soluzione per tale funzione.

**Funzione di Green in 2D** La posizione della sorgente è  $\mathbf{r}_0$  e quella dell'osservatore è  $\mathbf{r}$ . La *funzione di Green in 2D* è una funzione di  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$  e si indica con  $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ . Con i riferimenti alle proprietà della delta di Dirac in 2D e della trasformata di Fourier in 2D, si ottiene che

$$G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\mathbf{u} \cdot |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)}{u^2 - k^2} d^2\mathbf{u}. \quad (4.6)$$

In coordinate polari

$$G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(iu \cdot |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \cos(\theta))}{u^2 - k^2} dud\theta. \quad (4.7)$$

che tuttavia si semplifica se teniamo conto solo delle onde in uscita dalla sorgente. Fisicamente è ciò che succede.

$$G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \cos(\theta)) d\theta. \quad (4.8)$$

Per completezza, di seguito si rappresenta la funzione di Green per un'onda sferica

$$G(x) = \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}.$$

**Equazione di Helmholtz omogenee applicata al campo acustico** Si considera un'onda longitudinale giacente su un piano e il mezzo omogeneo sia considerato molto lontano dalla sorgente, le equazioni 3.14 e 3.15 prenderebbero la forma

$$\nabla^2 P(\mathbf{r}, \omega) + \omega^2 \rho \chi P(\mathbf{r}, \omega) = 0,$$

$$\nabla^2 \cdot V(\mathbf{r}, \omega) + \omega^2 \rho \chi V(\mathbf{r}, \omega) = 0$$

dove  $P$  e  $V$  sono le trasformate di Fourier di  $p$  e  $v$  rispettivamente e sono funzioni dello spazio. Con dei passaggi banali arriviamo alle seguenti equazioni

$$(\nabla^2 + k^2)P(\mathbf{r}, \omega) = 0,$$

$$(\nabla^2 + k^2)V(\mathbf{r}, \omega) = 0.$$

Esse sono equazioni omogenee di Helmholtz che descrivono la natura dell'onda piana con ampiezza d'onda costante. La prima ha soluzione

$$P(\mathbf{r}, \omega) = P(\omega)e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (4.9)$$

con  $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{k}}$  con  $\hat{\mathbf{k}}$  il versore che ha direzione di propagazione dell'onda. Si può riportare questo risultato nel dominio del tempo operando l'antitrasformata di Fourier

$$p(\mathbf{r}, t) = p_0 \left( t - \frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}}{c} \right). \quad (4.10)$$

Si ricorda  $\hat{\mathbf{k}} \cdot \vec{r}$  è la proiezione del vettore  $\vec{r}$  sul versore  $\hat{\mathbf{k}}$ .

Anche se l'oggetto in esame ha una distribuzione non omogenea dei valori di compressibilità, densità, viscosità e fattore di perdite, di seguito presenteremo un modello che porta, con poche differenze, alle stesse equazioni. Per evitare di affrontare modelli matematicamente troppo complessi, si faranno volta per volta delle ipotesi sullo stato fisico del materiale sotto esame.

**Accenni sulla teoria dello scattering** A differenza del campo acustico generato da una sorgente, il campo di scattering dipende sia dalla natura dello scatterer che dalle proprietà di scattering dell'onda. Sia  $u$  una grandezza scalare legata al campo di onde, allora abbiamo visto come si possa scrivere l'equazione delle onde nella forma dell'equazione di Helmholtz disomogenea. Per esempio, uno scatterer isotropo non viscoso presenta delle fluttuazioni di densità  $\gamma_\rho$  e di comprimibilità  $\gamma_\kappa$  che generano i fenomeni di scattering.

$$(\nabla^2 + k^2)P = -k^2\gamma_\kappa + \nabla \cdot (\gamma_\rho \nabla P) \quad (4.11)$$

con  $P$  la trasformata di Fourier della pressione e il termine a destra rappresenta il termine  $\hat{L}$ . Nel capitolo precedente abbiamo visto come l'equazione 4.4 si risolve con la funzione di Green, ora vediamo come si può utilizzare questa funzione per risolvere l'equazione delle onde di scattering nel caso in cui la densità sia costante.

**Approssimazioni di Born e Rytov (caso ideale)** Si prende uno spazio infinito costituito interamente da un materiale omogeneo in cui non avviene dispersione o perdita di energia. All'interno di questo ambiente si inserisce un oggetto di densità costante  $\rho = \rho_0$  in tutto il suo dominio, l'oggetto è racchiuso da un volume sferico di raggio  $a$  e il centro del cerchio è anche l'origine di un sistema di riferimento cartesiano. Si assume che l'onda che attraversa l'oggetto non subisca perdite di energia. Per ogni punto dell'oggetto si definisce una velocità di propagazione  $c(\mathbf{r})$ . Si prende la velocità potenziale 3.16 e, con l'ipotesi di densità costante, si scrive per questa l'equazione di Helmholtz omogenea associata

$$\nabla^2 \phi + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{r})} \phi = 0$$

e si introduce una funzione  $q(\mathbf{r})$  tale che

$$q(\mathbf{r}) = k^2 \left( 1 - \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{r})} \right) \quad (4.12)$$

con  $c_0$  velocità del suono di riferimento. Si può riscrivere l'equazione di Helmholtz come

$$(\nabla^2 + k^2)\phi = q(\mathbf{r})\phi. \quad (4.13)$$

Ovviamente, la funzione  $q$  è nulla se la posizione  $\mathbf{r}$  è fuori dal volume, cioè quando  $|\mathbf{r}| > a$ . Introducendo una funzione  $u$  tale che

$$u = \ln(\phi)$$

si riscrive la 4.12 nella forma

$$\nabla^2 u + (\nabla u)^2 + k^2 = q(\mathbf{r}), \quad (4.14)$$

che è una equazione differenziale ordinaria quadratica nella forma dell'equazione di Riccati. L'approssimazione di primo ordine della 4.1 si chiama approssimazione di Born, mentre l'approssimazione di primo ordine della 4.14 si dice approssimazione di Rytov. Consideriamo la funzione  $q(\mathbf{r})$  come una funzione di perturbazione, si aggiunge una variabile fittizia  $\epsilon$ :  $\epsilon q(\mathbf{r})$  così da poter sviluppare una serie di potenze per le soluzioni  $\phi$  e  $u$ :

$$\phi = \phi_0(1 + \phi_1\epsilon + \phi_2\epsilon^2 + \dots) \quad (4.15)$$

$$u = u_0(1 + u_1\epsilon + u_2\epsilon^2 + \dots) \quad (4.16)$$

e quindi sostituirle nelle equazioni 4.1 e 4.14. Si ottiene un sistema di equazioni lineari disomogenee differenziali

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2)\phi_0 &= 0 \\ \nabla^2\phi_1 + 2\frac{\nabla\phi_0}{\phi_0} \cdot \nabla\phi_1 &= q(\mathbf{r}) \\ &\vdots \\ \nabla^2\phi_n + 2\frac{\nabla\phi_0}{\phi_0} \cdot \nabla\phi_n &= q(\mathbf{r})\frac{\phi^{(n-1)}}{\phi_0} \end{aligned} \quad (4.17)$$

e

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_0 + (\nabla u_0)^2 + k^2 &= \\ \nabla^2 u_1 + 2(\nabla u_0 \cdot \nabla_1) &= q(\mathbf{r}) \\ &\vdots \\ \nabla^2 u_n + 2(\nabla u_0 \cdot \nabla_n) &= \sum_{i=1}^{n-1} \nabla u_{(n-i)} \nabla u_i. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Si identifica la funzione  $\phi_0$  come l'onda piana che perturba l'oggetto

$$\phi_0 = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (4.19)$$

e quindi la funzione associata  $u_0$  è

$$u_0 = i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (4.20)$$

Di seguito, l'approssimazione di primo ordine della 4.17 si dice *approssimazione di Born*

$$\nabla^2 \phi_1 + i2\mathbf{k} \cdot \nabla \phi_1 = q(\mathbf{r}) \quad (4.21)$$

e l'approssimazione di primo ordine della 4.18 è l'*approssimazione di Rytov*

$$\nabla^2 u_1 + i2\mathbf{k} \cdot \nabla u_1 = q(\mathbf{r}) \quad (4.22)$$

Le due approssimazioni non sono identiche perché la norma della perturbazione, che da una approssimazione al primo ordine accettabile rispetto all'equazione originaria, può essere diversa tra Born e Rytov. Vi è un'ampia letteratura sui motivi che portano a scegliere una piuttosto che l'altra a seconda delle applicazioni. Tuttavia, per la tomografia acustica, molti autori concordano nel preferire l'approssimazione di Rytov.

**Campo di onde continue** Si prenda un'onda acustica continua, caratterizzata da frequenza e ampiezza costante (vedi paragrafo 3.1) che attraversa lo scatterer. Si ipotizzi che lo scatterer abbia una distribuzione di densità omogenea, cioè  $\rho = \rho_0$  in tutto il suo dominio e la sua sezione sia una superficie finita  $\Omega$  racchiusa da un volume sferico di raggio  $a$ . La natura disomogenea della comprimibilità porta a fenomeni di diffrazione e quindi il dato misurato è un campo acustico diffratto. Il modello matematico che descrive questo campo si ottiene dall'equazione disomogenea di Helmholtz in cui viene applicata la teoria di scattering ideata da Born. Sia  $P_s$  il campo di pressione misurato in un punto  $\mathbf{r}$  dato dalla presenza di una sorgente acustica collocata nel punto  $\mathbf{r}_i$ :

$$(\nabla^2 + k^2)P_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i, k) = -k^2 \gamma_\kappa(\mathbf{r})G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_i, k) \quad (4.23)$$

dove

$$\gamma_\kappa = \frac{\kappa - \kappa_0}{\kappa_0}. \quad (4.24)$$

La soluzione a questa equazione è data dalla funzione di Green in 2D:

$$P_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i, k) = \frac{ik}{8\pi} \int_{\Omega} \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|)}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}} \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|)}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|}} \gamma_\kappa(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r}. \quad (4.25)$$

Se consideriamo le condizioni tipiche di un esperimento di tomografia

$$\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}_i|} \ll 1, \quad \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s|} \ll 1, \quad |\mathbf{r}_i| \simeq |\mathbf{r}_s| \simeq a$$

vedi figura 4.1, si può riscrivere la 4.25 come

$$P_s(\hat{\mathbf{n}}_s, \hat{\mathbf{n}}_i, k) = \frac{ik}{8\pi a} \exp(2ika) \int_A \exp[-ik(\hat{\mathbf{n}}_s - \hat{\mathbf{n}}_i) \cdot \mathbf{r}] \gamma_\kappa(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} \quad (4.26)$$

con i versori

$$\hat{\mathbf{n}}_i = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}_i|}, \quad \hat{\mathbf{n}}_s = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s|}.$$

Questa equazione è essenzialmente una trasformata di Fourier della fluttuazione di comprimibilità in cui  $\hat{\mathbf{n}}_i$  e  $\hat{\mathbf{n}}_s$  rappresentano la direzione del campo di pressione incidente e diffratto, rispettivamente.

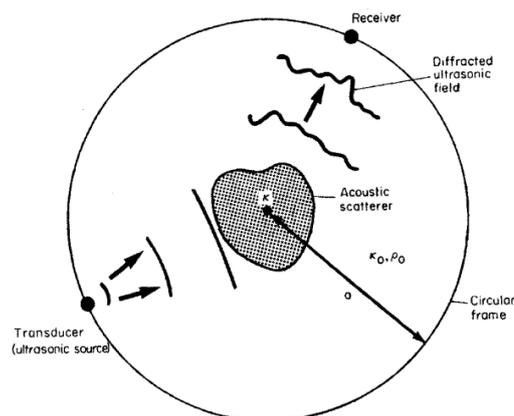


Figura 4.1: Esperimento con onde continue

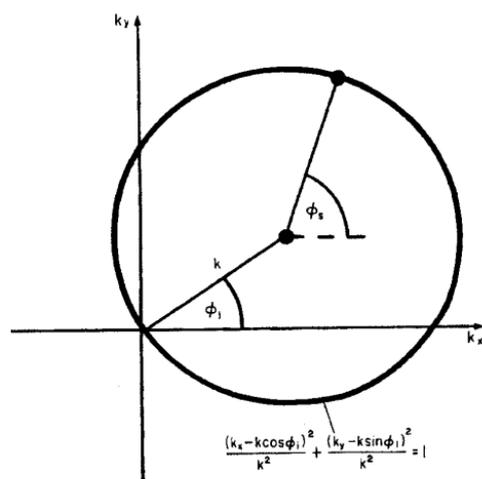


Figura 4.2: Relazione geometrica tra le frequenze e gli angoli di incidenza e diffrazione

## 4.2 Misurazione tomografica

La misurazione tomografica consiste nel ruotare il trasmettitore di segnale acustico lungo la circonferenza descritta di raggio  $a$ , perciò l'analisi del campo si calcola in modo più appropriato con le coordinate polari

$$P_s(k_x, k_y) = \frac{ik}{8\pi a} \exp(2ika) \int \int \exp(-ik_x x) \exp(-ik_y y) \gamma_\kappa(x, y) dx dy \quad (4.27)$$

dove

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}}_i &= \hat{\mathbf{x}} \cos(\phi_i) + \hat{\mathbf{y}} \sin(\phi_i), \\ \hat{\mathbf{n}}_s &= \hat{\mathbf{x}} \cos(\phi_s) + \hat{\mathbf{y}} \sin(\phi_s). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} k_x &= k(\cos(\phi_s) - \cos(\phi_i)), \\ k_y &= k(\sin(\phi_s) - \sin(\phi_i)). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Le equazioni parametriche 4.28 ci dicono come gli angoli  $\phi_i$  e  $\phi_s$  (noti perché sono dati sperimentali) sono legati alle frequenze spaziali  $k_x$  e  $k_y$ . Si possono rappresentare geometricamente queste relazioni con una circonferenza di raggio  $k$  di centro  $(k \cos(\phi_i), k \sin(\phi_i))$ , vedi figura 4.3. Il dato misurato è l'ampiezza del campo di pressione totale  $P$ . Ovviamente, per ricostruire l'immagine è necessario estrapolare  $\gamma_\kappa$  che è una informazione appartiene al campo di pressione diffratto. Perciò, essendo il campo misurato una somma di campo diffratto  $P_s$  e incidente  $P_i$ , è sufficiente misurare l'ampiezza  $A$  e la fase  $\theta$  della pressione in assenza di fenomeni di scattering e poi ricavare il campo di pressione diffratto.

$$\begin{aligned} P(k_x, k_y) &= P_i(k_x, k_y) + P_s(k_x, k_y), \\ P_i(\phi_i, \phi_s) &= A_i(\phi_i, \phi_s) \exp[i\theta_i(\phi_i, \phi_s)], \\ P(\phi_i, \phi_s) &= A(\phi_i, \phi_s) \exp[i\theta(\phi_i, \phi_s)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_s(\phi_i, \phi_s) &= P(\phi_i, \phi_s) + P_i(\phi_i, \phi_s) = \\ &A \cos(\theta) - A_i \cos(\theta_i) + i(A \sin(\theta) - A_i \sin(\theta_i)). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Da quanto appena detto, si evince che il comportamento del campo incidente deve essere una informazione a priori per calibrare il sistema di misurazione prima di condurre l'esperimento. Si inverte quindi la relazione di  $P_s$  con una appropriata antitrasformata di Fourier della 4.27 e si prende solo la parte reale, essendo  $\gamma_\kappa$  un parametro fisico.

$$\begin{aligned} \gamma_\kappa(x, y) &= \Re \left( \frac{2a}{ik\pi} \exp(-2ika) \int \int \exp(-ik_x x) \exp(-ik_y y) \right. \\ &P_s(k_x, k_y) dk_x dk_y. \end{aligned} \quad (4.30)$$

In questa equazione,  $P_s$  è funzione di  $k_x$  e  $k_y$  e questi non sono parametri sperimentali. Quindi, per utilizzare questa inversione, dobbiamo implementare la funzione parametrica

$$\frac{(k_x + k \cos(\phi_i))^2}{k^2} + \frac{(k_y + k \sin(\phi_i))^2}{k^2} = 1$$

che si ottiene fissando  $\phi_i$  e facendo ruotare  $\phi_s$  da 0 a  $2\pi$ , cioè l'angolo di diffrazione, così da definire lo spazio delle frequenze, vedi la figura 4.3. Cambiando il valore dell'angolo di incidenza  $\phi_i$  facendo ruotare la sorgente acustica, l'origine del cerchio della figura 4.3 cambia la sua posizione e si ottiene un nuovo gruppo di frequenze che consentono di misurare il campo di diffrazione ad ogni valore di  $\phi_s$ . Ripetendo l'operazione per ogni valore di  $\phi_i$  da 0 a  $2\pi$ , tutte le frequenze dello scatterer vengono misurate. In altre parole, il problema tomografico di diffrazione consiste nel misurare il campo di pressione di scatterer attraverso lo spettro di frequenze che si ottiene per i valori di  $\phi_i$  e  $\phi_s$  tra 0 e  $2\pi$ , vedi la figura 4.3.

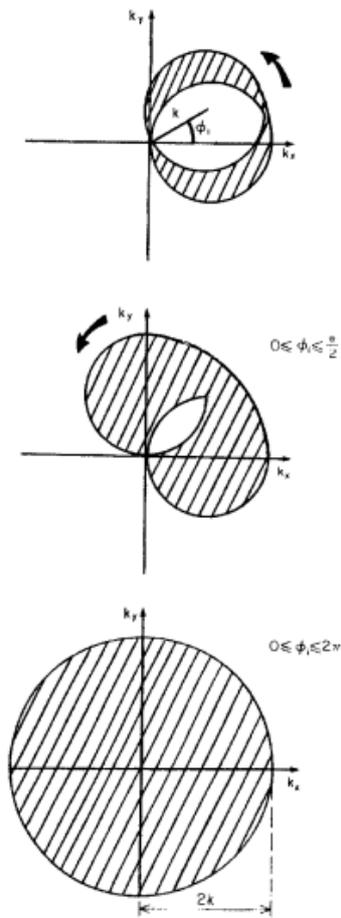


Figura 4.3: Cambiando posizione della sorgente, si ottengono le frequenze dello scatterer

# Capitolo 5

## Conclusioni

Questa tesi vuole essere un primo approccio allo studio della tomografia acustica, che, per essere applicata in modo efficiente, ha sicuramente bisogno di molti approfondimenti. Si è voluto dare molto spazio ai fondamenti di acustica, ai problemi inversi e all'analisi di Fourier perché sono propedeutici alla ricostruzione tomografica e in generale ai metodi di inversione che vedono molte applicazioni ingegneristiche.

In riferimento all'ispezione non distruttiva dei manufatti metallici, si è visto che la tomografia acustica presenta ottimi risultati per acciai [15] rispetto ai tipici controlli *pulse-echo ultrasound* [1]. Si è inoltre trovato un modello efficace per acciai ad alto livello di attenuazione [19].

# Bibliografia

- [1] Yoko Norose, Koichi Mizutani<sup>1</sup> and Naoto Wakatsuki<sup>1</sup>. Nondestructive inspection for steel billet using phase-modulated signal by gold sequence for improving measurement speed. *Jpn. J. Appl. Phys.*, 2012.
- [2] A. J. Devaney. *Acoustic Tomography*. Inverse problems of acoustic and elastic waves. SIAM, 1984.
- [3] A.J.Devaney. A computer simulation study of diffraction tomography. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, pages 377 – 386, 1983.
- [4] A.J.Devaney. Inverse source and scattering problems in ultrasonics. *IEEE transactions on sonics and ultrasonics*, VOL. SU-30, NO.6:1–9, 1983.
- [5] Jonathan M. Blackledge. *Digital Image Processing: Mathematical and Computational Methods*. Horwood, 2005.
- [6] Pashanth Kumar Chinta. *Ultrasonic Nondestructive Testing of Inhomogeneous Isotropic and Anisotropic Media : Modeling and Imaging*. Kassel : kassel university press GmbH, 2013.
- [7] A.J. Devaney. A filtered backpropagation algorithm for diffraction tomography. *IEEE Ultrasonic Imaging*, pages 336–350, 1982.
- [8] Francisco Pinto, Mihailo Kolundžija and Martin Vetterli. Digital acoustics: processing wave fields in space and time using dsp tools. *APSIPA Transactions on Signal and Information Processing*, 3, E18, 2014.
- [9] Jovanovic, Ivana. Inverse Problems in Acoustic Tomography: Theory and Applications. Master’s thesis, 2018.
- [10] M. Camplani, B. Cannas, S. Carcangiu, G. Concu, A. Fanni, A. Montisci. Software per tomografia acustica 2D di elementi strutturali.(Italian). *AIPnD - PnD Congresso 2009 Oct 15-17, Rome, Italy (AIPnD 2009)*, pages 1–9.
- [11] Russel Manning Mersereau. Digital Reconstruction of Multidimensional Signal from Their Projection. *Proceedings of the IEEE*, 62:1319 – 1338, 1969.
- [12] R. K. Mueller, M. Kaveh, and G. Wade. Reconstructive tomography and applications to ultrasonics. *Proceedings of the IEEE*, 67:567–587, 1979.
- [13] Federica Pes. Regolarizzazione di problemi mal posti con applicazione alla tomografia acustica. Master’s thesis, Corso di Laurea Magistrale in Matematica, Università degli studi di Cagliari, 2018. <http://bugs.unica.it/gppe/did/tesi/18pes>.

- [14] P.Fleury, J.P. Mathieu. *Vibrazioni Meccaniche*. Acustica. Zanichelli Bologna, 1970.
- [15] Ryusuke Miyamoto, Koichi Mizutani, Tadashi Ebihara, and Naoto Wakatsuki . Ultrasonic inspection method for billet using time-of-flight deviation of bottom echo and its performance evaluation in numerical simulations. *Jpn. J. Appl. Phys*, 2017.
- [16] Samuli Siltanen and Jesse Railo. Inverse Problems 2 course. University of Helsinki. <https://www.helsinki.fi/en/unitube/video/9d827eac-53c9-498d-aa7a-f76479859b0e>, year= "2018.
- [17] Gordon S.Kino. *Acoustic Waves: Devices, Imaging and Analog Signal Processing*. Acustica. Patience-Hall, 1987.
- [18] Wikipedia, l'Enciclopedia Libera. Velocità del suono. [https://it.wikipedia.org/wiki/Velocit%C3%A0\\_del\\_suono](https://it.wikipedia.org/wiki/Velocit%C3%A0_del_suono).
- [19] Yoko Norose, Koichi Mizutani and Naoto Wakatsuki. Application of ultrasonic computerized tomography using time-of-flight measured by transmission method to nondestructive inspection for high-attenuation billets. *Jpn. J. Appl. Phys.*, 2014.