Interpolazione polinomiale

Andrea Azzarelli
Relatore: prof. Giuseppe Rodriguez

Università degli Studi di Cagliari
Corso di laurea in Matematica

18 settembre 2020

È una tecnica di approssimazione di funzioni in cui si cerca un polinomio che assuma esattamente il valore della funzione originale in un certo numero di punti detti **nodi**.

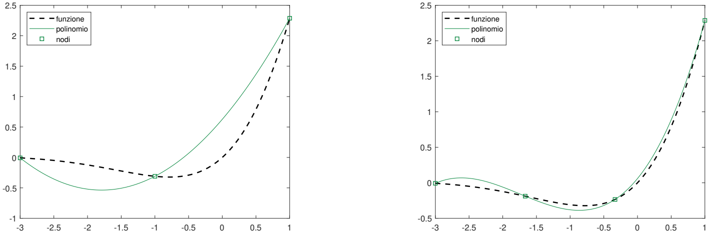


Figura: Interpolazione della funzione $y = e^x \sin x$ con 3 e 4 nodi equispaziati.

Esempi di applicazioni

Trattamento di dati sperimentali:

- Conoscere il valore di una funzione in un intervallo la quale è nota solo in alcuni punti;

Risoluzione di problemi matematici computazionalmente complessi:

- Formule di quadratura, derivazione numerica o altri processi che si semplificano grazie alla proiezione di una funzione che appartiene a uno spazio di dimensione infinita sullo spazio funzionale $\mathbb{P}_n$ di dimensione finita:

$$\mathbb{P}_n = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Esempi di applicazioni

Trattamento di dati sperimentali:

- Conoscere il valore di una funzione in un intervallo la quale è nota solo in alcuni punti;

Risoluzione di problemi matematici computazionalmente complessi:

- Formule di quadratura, derivazione numerica o altri processi che si semplificano grazie alla proiezione di una funzione che appartiene a uno spazio di dimensione infinita sullo spazio funzionale $\mathbb{P}_n$ di dimensione finita:

$$\mathbb{P}_n = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Definizione rigorosa

Definizione (polinomio interpolante)

Data una funzione $y = f(x)$ della quale si conoscono i valori

$$y_j = f(x_j), \qquad j = 0, \dots, n,$$

un polinomio $p \in \mathbb{P}_n$ **interpola** la funzione f nei punti x_j se

$$p(x_j) = y_j, \qquad j = 0, \dots, n.$$

Teorema (Esistenza e unicità)

Fissati $n+1$ nodi, il polinomio interpolante di grado n esiste ed è unico se e solo se $x_i \neq x_j$ per ogni $i \neq j$.

Definizione rigorosa

Definizione (polinomio interpolante)

Data una funzione $y = f(x)$ della quale si conoscono i valori

$$y_j = f(x_j), \qquad j = 0, \dots, n,$$

un polinomio $p \in \mathbb{P}_n$ **interpola** la funzione f nei punti x_j se

$$p(x_j) = y_j, \qquad j = 0, \dots, n.$$

Teorema (Esistenza e unicità)

Fissati $n+1$ nodi, il polinomio interpolante di grado n esiste ed è unico se e solo se $x_i \neq x_j$ per ogni $i \neq j$.

Rappresentazioni

Canonica È la più immediata, serve per dimostrare il teorema di esistenza e unicità ma risulta instabile:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i .$$

Newton (1670) Si basa su una formula ricorsiva ed è utile quando si vuole aggiungere un nuovo punto alla volta conservando tutti gli altri.

Lagrange (1795) Si basa sulla creazione di una particolare base dello spazio dei polinomi $\mathbb{P}_n$.

Rappresentazioni

Canonica È la più immediata, serve per dimostrare il teorema di esistenza e unicità ma risulta instabile:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i .$$

Newton (1670) Si basa su una formula ricorsiva ed è utile quando si vuole aggiungere un nuovo punto alla volta conservando tutti gli altri.

Lagrange (1795) Si basa sulla creazione di una particolare base dello spazio dei polinomi $\mathbb{P}_n$.

Canonica È la più immediata, serve per dimostrare il teorema di esistenza e unicità ma risulta instabile:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Newton (1670) Si basa su una formula ricorsiva ed è utile quando si vuole aggiungere un nuovo punto alla volta conservando tutti gli altri.

Lagrange (1795) Si basa sulla creazione di una particolare base dello spazio dei polinomi $\mathbb{P}_n$.

I polinomi che costituiscono la base per la rappresentazione di Lagrange sono detti **polinomi caratteristici di Lagrange**:

$$L_j^{(n)}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_j - x_k)}.$$

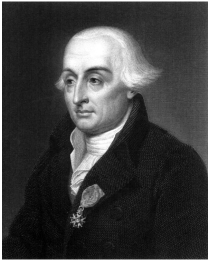
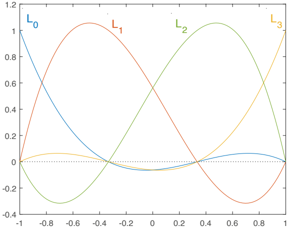


Figura: Joseph Louis Lagrange Torino, 1736 – Parigi, 1813.

Essi dipendono unicamente dalle ascisse di interpolazione.

Questi polinomi possiedono una proprietà notevole in relazione ai nodi:

$$L_j^{(n)}(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

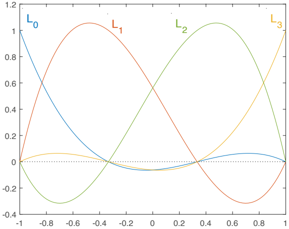


la quale rende estremamente semplice la scrittura del polinomio interpolante, in questa base infatti i suoi coefficienti sono semplicemente i valori $f(x_j)$:

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) L_j^{(n)}(x).$$

Questi polinomi possiedono una proprietà notevole in relazione ai nodi:

$$L_j^{(n)}(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$



la quale rende estremamente semplice la scrittura del polinomio interpolante, in questa base infatti i suoi coefficienti sono semplicemente i valori $f(x_j)$:

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) L_j^{(n)}(x).$$

L'errore

Teorema (Weierstrass)

Sia $f \in C([a,b])$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero n e un polinomio $p_n \in \mathbb{P}_n$ tale che

$$\|E_n(x)\| := \|f - p_n\|_\infty < \varepsilon.$$

Definizione

Definiamo **polinomio di migliore approssimazione di grado** n il polinomio p_n^* tale che

$$\|f - p_n^*\|_\infty = \min_{p_n \in \mathbb{P}_n} \|f - p_n\|_\infty := E_n^*(f).$$

La quantità $E_n^*(f)$ è detta **errore di migliore approssimazione.**

L'errore

Teorema (Weierstrass)

Sia $f \in C([a,b])$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero n e un polinomio $p_n \in \mathbb{P}_n$ tale che

$$\|E_n(x)\| := \|f - p_n\|_\infty < \varepsilon.$$

Definizione

Definiamo **polinomio di migliore approssimazione di grado** n il polinomio p_n^* tale che

$$\|f - p_n^*\|_\infty = \min_{p_n \in \mathbb{P}_n} \|f - p_n\|_\infty := E_n^*(f).$$

La quantità $E_n^*(f)$ è detta **errore di migliore approssimazione.**

Teorema

Sia $f \in C^{n+1}([a,b])$ e p_n il polinomio interpolante, allora per ogni $x \in [a,b]$ esiste un punto $\xi_x \in [a,b]$ tale che

$$E_n(x) := f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_n(x),$$

dove $\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$.

Questo teorema ha delle importanti conseguenze:

- se $|f^{(n+1)}(x)|$ è limitata per ogni n su $[a,b]$, allora $\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$ tende a zero al crescere di n;
- $\|\omega_n(x)\|_\infty$ tende all'infinito al crescere di n, la velocità di crescita dipende dalla scelta dei nodi.

Teorema

Sia $f \in C^{n+1}([a,b])$ e p_n il polinomio interpolante, allora per ogni $x \in [a,b]$ esiste un punto $\xi_x \in [a,b]$ tale che

$$E_n(x) := f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_n(x),$$

dove $\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$.

Questo teorema ha delle importanti conseguenze:

- se $|f^{(n+1)}(x)|$ è limitata per ogni n su $[a,b]$, allora $\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$ tende a zero al crescere di n;
- $\|\omega_n(x)\|_\infty$ tende all'infinito al crescere di n, la velocità di crescita dipende dalla scelta dei nodi.

Teorema

Sia $f \in C^{n+1}([a,b])$ *e* p_n *il polinomio interpolante, allora per ogni* $x \in [a,b]$ *esiste un punto* $\xi_x \in [a,b]$ *tale che*

$$E_n(x) := f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_n(x),$$

dove $\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$.

Questo teorema ha delle importanti conseguenze:

- se $|f^{(n+1)}(x)|$ è limitata per ogni n su $[a,b]$, allora $\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$ tende a zero al crescere di n;
- $\|\omega_n(x)\|_\infty$ tende all'infinito al crescere di n, la velocità di crescita dipende dalla scelta dei nodi.

Costanti di Lebesgue

Raccogliamo nelle righe di una matrice X, detta **matrice di interpolazione**, i nodi scelti:

$$X = \begin{pmatrix} x_0^{(0)} & & & \\ x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & & \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

Sia $P_n(X, f)$ l'operatore che a ciascuna funzione f associa il polinomio di grado n determinato dai nodi della corrispondente riga di X, si dimostra che

$$E_n(X, f) := \|f - P_n(X, f)\|_\infty \leq \big(1 + \Lambda_n(X)\big) E_n^*(f),$$

dove abbiamo introdotto le cosiddette **costanti di Lebesgue**:

$$\Lambda_n(X) = \left\| \sum_{j=0}^{n} \left| L_j^{(n)}(x) \right| \right\|_\infty.$$

Costanti di Lebesgue

Raccogliamo nelle righe di una matrice X, detta **matrice di interpolazione**, i nodi scelti:

$$X = \begin{pmatrix} x_0^{(0)} & & & \\ x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & & \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

Sia $P_n(X, f)$ l'operatore che a ciascuna funzione f associa il polinomio di grado n determinato dai nodi della corrispondente riga di X, si dimostra che

$$E_n(X, f) := \|f - P_n(X, f)\|_\infty \leq \big(1 + \Lambda_n(X)\big) E_n^*(f),$$

dove abbiamo introdotto le cosiddette **costanti di Lebesgue**:

$$\Lambda_n(X) = \left\| \sum_{j=0}^{n} \left| L_j^{(n)}(x) \right| \right\|_\infty.$$

Costanti di Lebesgue e stabilità

Ipotizziamo di calcolare il polinomio interpolante utilizzando dei dati perturbati:

$$\tilde{p}_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \tilde{y}_j L_j^{(n)}(x), \qquad \tilde{y}_j = y_j + \varepsilon_j, \quad \max_j |\varepsilon_j| = \sigma$$

Si ha

$$|p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq \sum_{j=0}^{n} |y_j - \tilde{y}_j| \cdot |L_j^{(n)}(x)| \leq \sigma \sum_{j=0}^{n} |L_j^{(n)}(x)|$$

Che implica

$$\|p_n - \tilde{p}_n\|_\infty \leq \sigma \Lambda_n(X)$$

Quindi le costanti di Lebesgue esprimono il condizionamento assoluto della rappresentazione di Lagrange.

Teorema

Per ogni X matrice di interpolazione esiste una costante c tale che

$$\Lambda_n(X) \geq \frac{2}{\pi} \log n - c.$$

Quindi per $n \longrightarrow \infty$ la successione Λ_n diverge con crescita almeno logaritmica.

Teorema (Nodi equispaziati)

Le costanti di Lebesgue associate ai nodi equispaziati crescono in modo ***esponenziale****.*

Andamento delle costanti di Lebesgue

Teorema

Per ogni X matrice di interpolazione esiste una costante c tale che

$$\Lambda_n(X) \geq \frac{2}{\pi} \log n - c.$$

Quindi per $n \longrightarrow \infty$ la successione Λ_n diverge con crescita almeno logaritmica.

Teorema (Nodi equispaziati)

*Le costanti di Lebesgue associate ai nodi equispaziati crescono in modo **esponenziale**.*

Per analizzare alcuni aspetti dell'interpolazione sono stati sviluppati su MATLAB dei programmi che permettono di calcolare

- i nodi di interpolazione;
- le costanti di Lebesgue dati i nodi;
- il polinomio interpolante su un intervallo col metodo di Lagrange dati i nodi e la funzione.

I programmi sono stati testati su diversi problemi, di seguito riportiamo i risultati relativi a uno di essi.

Nodi equispaziati

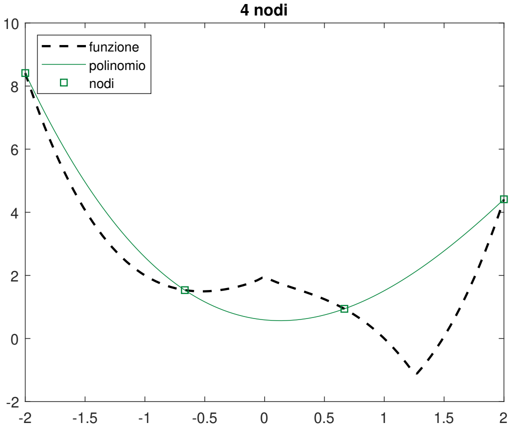


Figura: Interpolazione della funzione $f(x) = |x^3 - 2| - \sqrt[3]{x}$.

Nodi equispaziati

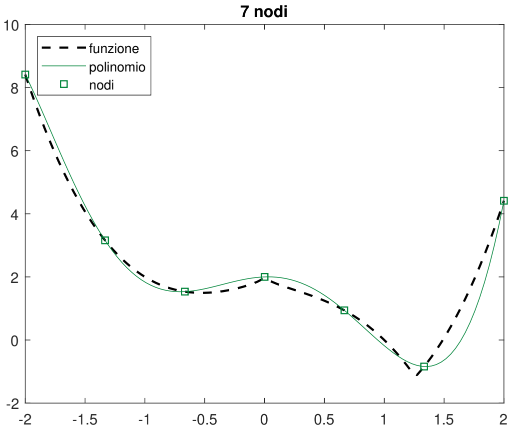


Figura: Interpolazione della funzione $f(x) = |x^3 - 2| - \sqrt[3]{x}$.

Nodi equispaziati

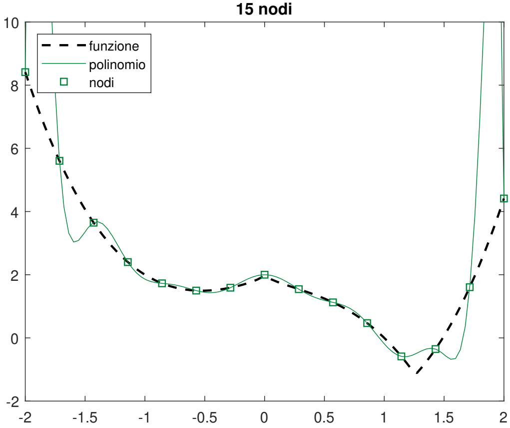


Figura: Interpolazione della funzione $f(x) = |x^3 - 2| - \sqrt[3]{x}$.

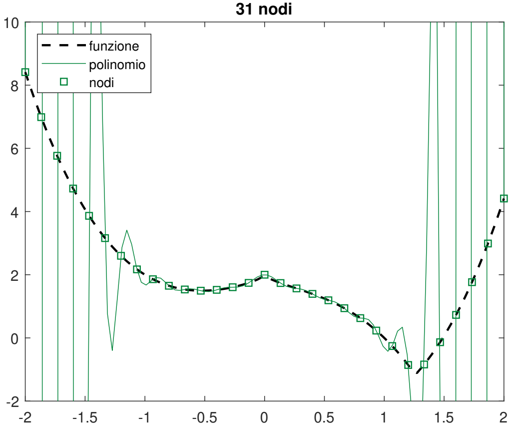
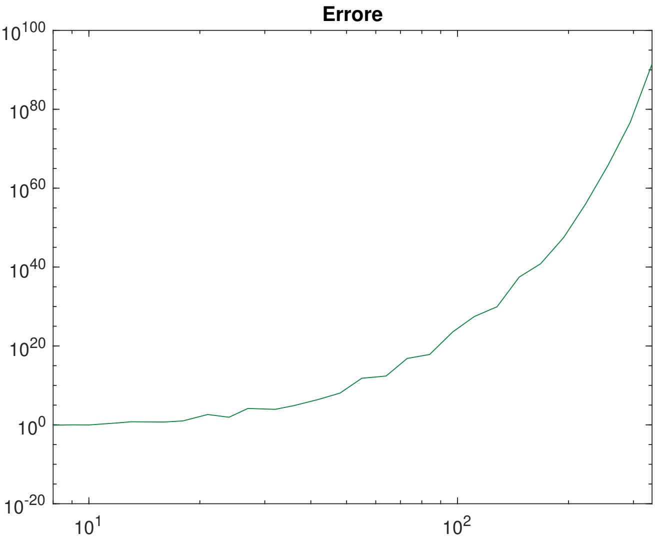
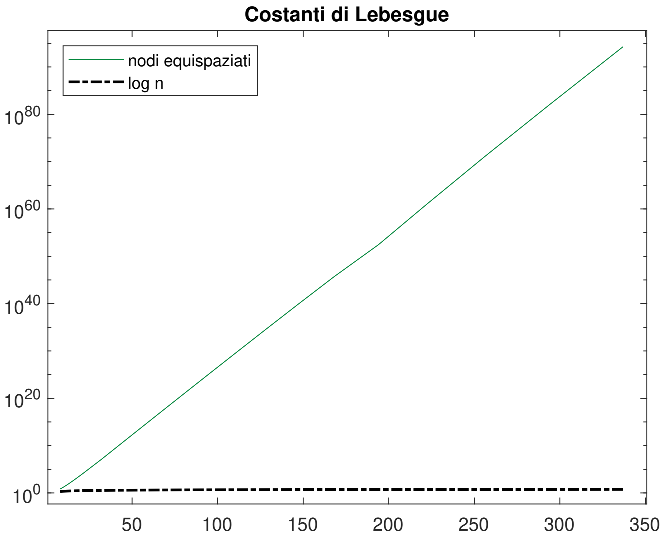


Figura: Interpolazione della funzione $f(x) = |x^3 - 2| - \sqrt[3]{x}$.

Nodi equispaziati



Nodi equispaziati



Polinomi ortogonali di Jacobi

La ricerca di nodi più efficienti ha portato a scegliere come ascisse di interpolazione le radici di particolari polinomi:

Definizione

Fissati $\alpha,\ \beta > -1$ sono detti **pesi di Jacobi** le funzioni

$$\omega_\beta^\alpha(x) := (1-x)^\alpha(1+x)^\beta.$$

I **polinomi ortogonali di Jacobi** sono una successione di polinomi $p_k \in \mathbb{P}_k$ che risultano reciprocamente ortogonali rispetto al prodotto scalare pesato:

$$\langle p_k, p_j \rangle = \int_{-1}^{1} p_k(x) p_j(x) \omega_\beta^\alpha(x) \mathrm{d}x = 0, \qquad j \neq k,$$

definito sullo spazio $L^2_\omega[-1,1]$.

Polinomi ortogonali di Jacobi

La ricerca di nodi più efficienti ha portato a scegliere come ascisse di interpolazione le radici di particolari polinomi:

Definizione

Fissati $\alpha, \beta > -1$ sono detti **pesi di Jacobi** le funzioni

$$\omega_\beta^\alpha(x) := (1-x)^\alpha(1+x)^\beta.$$

I **polinomi ortogonali di Jacobi** sono una successione di polinomi $p_k \in \mathbb{P}_k$ che risultano reciprocamente ortogonali rispetto al prodotto scalare pesato:

$$\langle p_k, p_j \rangle = \int_{-1}^{1} p_k(x) p_j(x) \omega_\beta^\alpha(x) \mathrm{d}x = 0, \qquad j \neq k,$$

definito sullo spazio $L^2_\omega[-1,1]$.

Nodi di Jacobi

Teorema

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ il polinomio p_{n+1} ha $n+1$ radici

- *semplici;*
- *reali;*
- *contenute in $(-1,1)$.*

Chiamiamo ***nodi di Jacobi*** *tali radici, indichiamo con X_β^α la relativa matrice di interpolazione.*

Una classe particolare di nodi di Jacobi è quella che si ottiene per $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, essi sono detti **nodi di Chebychev** e si possono calcolare in maniera semplice con la formula:

$$x_k^{(n)} = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\right), \qquad n \in \mathbb{N}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Nodi di Jacobi

Teorema

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ il polinomio p_{n+1} ha $n+1$ radici

- *semplici;*
- *reali;*
- *contenute in $(-1, 1)$.*

*Chiamiamo **nodi di Jacobi** tali radici, indichiamo con X^{α}_{β} la relativa matrice di interpolazione.*

Una classe particolare di nodi di Jacobi è quella che si ottiene per $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, essi sono detti **nodi di Chebychev** e si possono calcolare in maniera semplice con la formula:

$$x_k^{(n)} = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\right), \qquad n \in \mathbb{N}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Teorema

Fissati $p_{-1} = 0$, $p_0 = 1$ i polinomi ortogonali di Jacobi sono univocamente definiti dalla formula ricorsiva a tre termini

$$p_{k+1}(x) = (x - \alpha_k)p_k(x) - \beta_k^2 p_{k-1}(x),$$

dove

$$\alpha_k = \frac{\langle xp_k , p_k \rangle}{\langle p_k , p_k \rangle}, \qquad \beta_0^2 = 0, \qquad \beta_k^2 = \frac{\langle xp_k , p_{k-1} \rangle}{\langle p_{k-1} , p_{k-1} \rangle}.$$

Le radici del polinomio ortogonale p_{n+1} corrispondono agli autovalori della matrice tridiagonale simmetrica:

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & & \\ \beta_1 & \alpha_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta_n \\ & & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Teorema

Fissati $p_{-1} = 0$, $p_0 = 1$ i polinomi ortogonali di Jacobi sono univocamente definiti dalla formula ricorsiva a tre termini

$$p_{k+1}(x) = (x - \alpha_k)p_k(x) - \beta_k^2 p_{k-1}(x),$$

dove

$$\alpha_k = \frac{\langle xp_k, p_k \rangle}{\langle p_k, p_k \rangle}, \qquad \beta_0^2 = 0, \qquad \beta_k^2 = \frac{\langle xp_k, p_{k-1} \rangle}{\langle p_{k-1}, p_{k-1} \rangle}.$$

Le radici del polinomio ortogonale p_{n+1} corrispondono agli autovalori della matrice tridiagonale simmetrica:

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & & \\ \beta_1 & \alpha_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta_n \\ & & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Costanti di Lebesgue dei nodi di Jacobi

Teorema (Nodi di Chebychev)

Le costanti di Lebesgue relative ai nodi di Chebychev hanno una crescita al più logaritmica

$$\Lambda_n(X_{-0.5}^{-0.5}) < \frac{2}{\pi}\log n + 4.$$

Più in generale vale il seguente

Teorema (Nodi di Jacobi)

Per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\Lambda_n(X_\beta^\alpha) \sim \begin{cases} \log n & -1 < \alpha, \beta \le -\frac{1}{2}; \\ n^{\max\{\alpha,\beta\}+\frac{1}{2}} & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Costanti di Lebesgue dei nodi di Jacobi

Teorema (Nodi di Chebychev)

Le costanti di Lebesgue relative ai nodi di Chebychev hanno una crescita al più logaritmica

$$\Lambda_n(X_{-0.5}^{-0.5}) < \frac{2}{\pi} \log n + 4.$$

Più in generale vale il seguente

Teorema (Nodi di Jacobi)

Per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\Lambda_n(X_\beta^\alpha) \sim \begin{cases} \log n & -1 < \alpha, \beta \le -\frac{1}{2}; \\ n^{\max\{\alpha,\beta\}+\frac{1}{2}} & \textit{altrimenti}. \end{cases}$$

Nodi di Jacobi

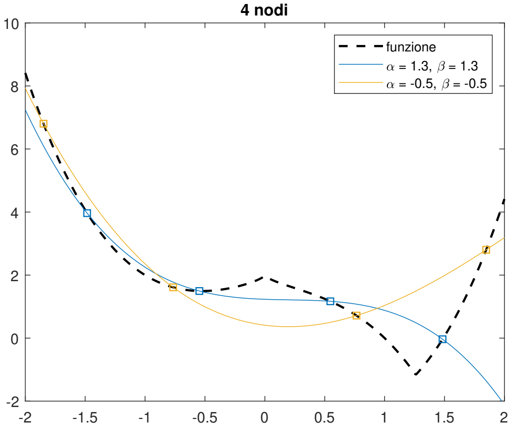


Figura: Interpolazione della funzione $f(x) = |x^3 - 2| - \sqrt[3]{x}$.

Nodi di Jacobi

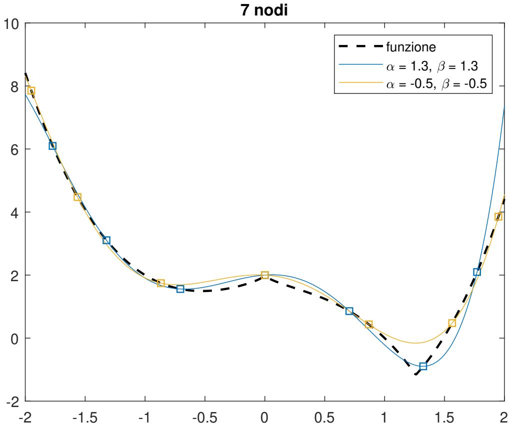


Figura: Interpolazione della funzione $f(x) = |x^3 - 2| - \sqrt[3]{x}$.

Nodi di Jacobi

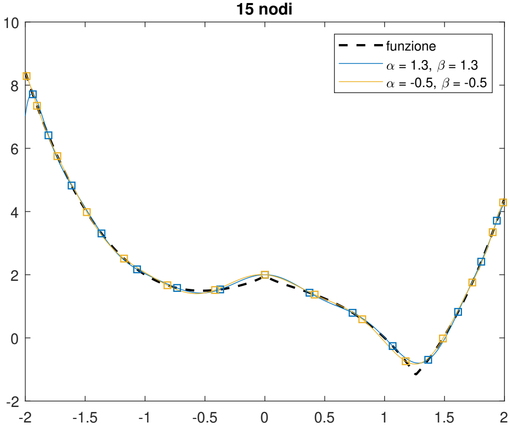


Figura: Interpolazione della funzione $f(x) = |x^3 - 2| - \sqrt[3]{x}$.

Nodi di Jacobi

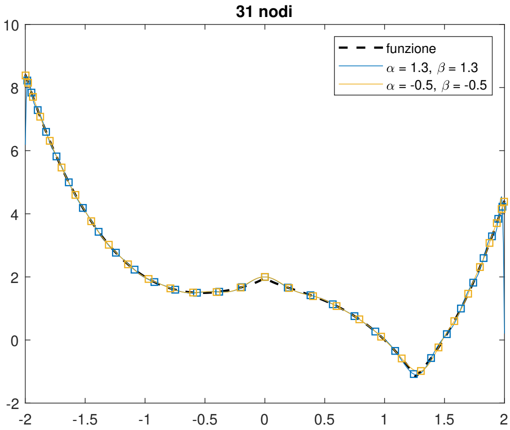


Figura: Interpolazione della funzione $f(x) = |x^3 - 2| - \sqrt[3]{x}$.

Nodi di Jacobi

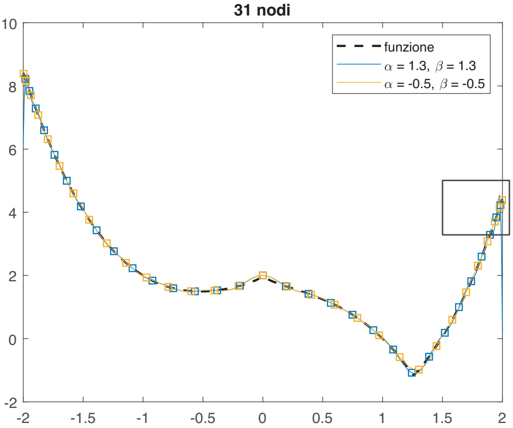


Figura: Interpolazione della funzione $f(x) = |x^3 - 2| - \sqrt[3]{x}$.

Nodi di Jacobi

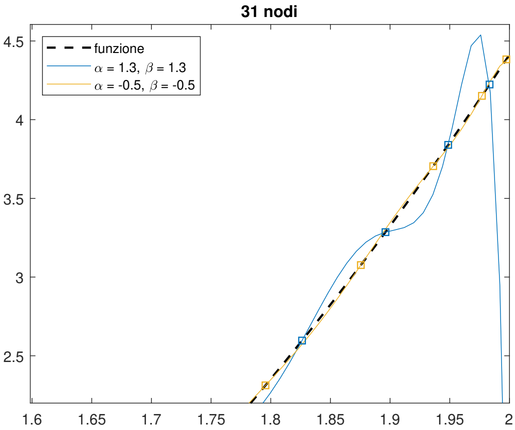
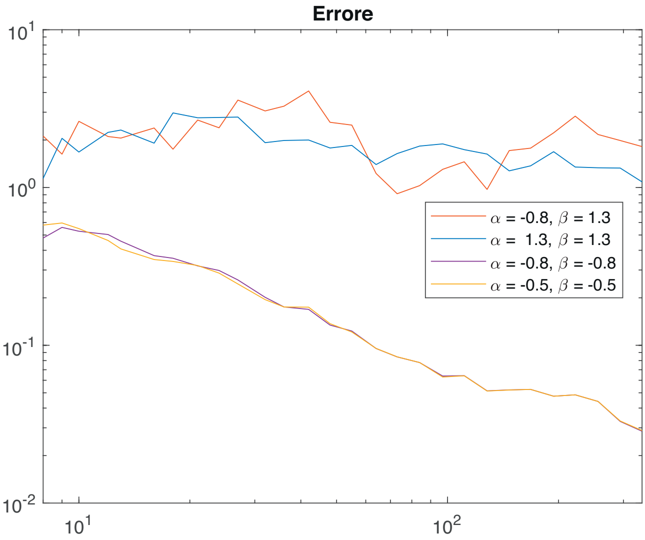
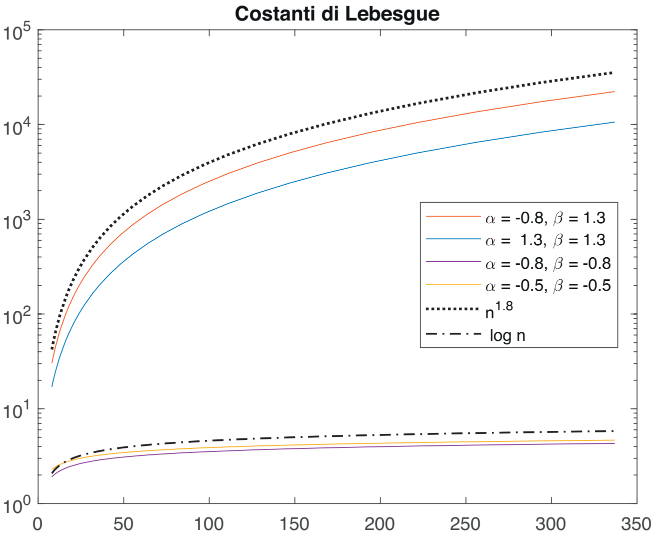


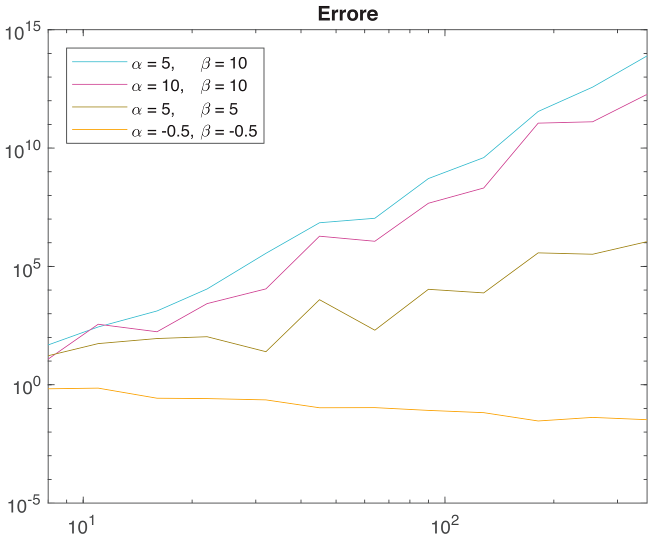
Figura: Interpolazione della funzione $f(x) = |x^3 - 2| - \sqrt[3]{x}$.

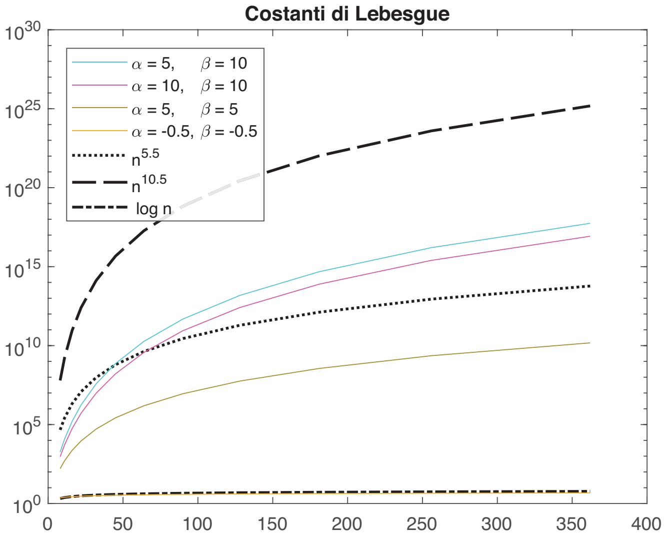
Nodi di Jacobi



Nodi di Jacobi




Errore
10^{15}
10^{10}
10^{5}
10^{0}
10^{-5}
10^{1}
10^{2}
$\alpha = 5, \quad \beta = 10$
$\alpha = 10, \quad \beta = 10$
$\alpha = 5, \quad \beta = 5$
$\alpha = -0.5, \beta = -0.5$


Costanti di Lebesgue
α = 5, β = 10
α = 10, β = 10
α = 5, β = 5
α = -0.5, β = -0.5
$n^{5.5}$
$n^{10.5}$
log n
10^{30}
10^{25}
10^{20}
10^{15}
10^{10}
10^{5}
10^{0}
0
50
100
150
200
250
300
350
400

Riferimenti bibliografici

[1] Luisa Fermo.
Applicable Approximation Theory. Cagliari, 2019.

[2] Walter Gautschi.
Orthogonal Polynomials, Computation and Approximation. Oxford University Press, 2004.

[3] Giuseppe Rodriguez.
Algoritmi numerici. Pitagora Editrice Bologna, 2008.