



# Università degli Studi di Cagliari

Facoltà di Ingegneria e Architettura

Dipartimento di Ingegneria Elettrica ed Elettronica

Corso di Laurea

Ingegneria Elettrica, Elettronica e Informatica

## Applicazioni dell'Analisi di Fourier ai segnali audio musicali

Relatore:  
Prof. Giuseppe Rodriguez

Tesi di Laurea di:  
Giovanni Deidda

Anno Accademico 2021-2022

## INDICE

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Segnali</b>	<b>3</b>
	2.1 Introduzione	3
	2.2 Alcuni segnali notevoli di base per la Teoria dei Segnali	6
	2.3 Il segnale suono	9
<b>3</b>	<b>L'Analisi di Fourier</b>	<b>12</b>
	3.1 Introduzione	12
	3.2 Serie di Fourier	12
	3.3 Trasformata di Fourier	16
<b>4</b>	<b>Il Campionamento</b>	<b>21</b>
	4.1 Introduzione	21
	4.2 Campionamento ideale	21
	4.3 Analisi del campionamento nel dominio del tempo	23
	4.4 Analisi del campionamento nel dominio della frequenza	25
	4.5 Teorema del campionamento	28
<b>5</b>	<b>Trasformata Discreta di Fourier</b>	<b>31</b>
	5.1 Trasformata discreta di Fourier	31
	5.2 Proprietà della DFT	35
	5.3 Problemi associati alla DFT	37
	5.4 Finestre di troncamento	43
<b>6</b>	<b>Cenni di teoria musicale</b>	<b>46</b>
	6.1 Introduzione	46
	6.2 Triadi	46
	6.3 Rappresentazione simbolica	48
<b>7</b>	<b>Applicazioni dell'Analisi di Fourier ai segnali audio musicali</b>	<b>51</b>
	7.1 Introduzione	51
	7.2 Acquisizione dei segnali	51
	7.3 Analisi dei segnali	54
	7.4 Analisi del segnale con il Chroma Toolbox	63
	7.5 Listati di alcune Matlab functions utilizzate negli esperimenti	65
	<b>Bibliografia</b>	<b>67</b>

# CAPITOLO 1.

## Introduzione

L'elaborazione dei segnali è oggi giorno di vitale importanza per la totalità delle discipline scientifiche. Esso è uno degli strumenti più utili e ampiamente utilizzati, soprattutto a partire dai primi anni 60 del secolo scorso, dopo l'introduzione del calcolatore. Da quel momento, l'Analisi di Fourier, una tecnica di analisi matematica già consolidata dal punto di vista teorico, ha avuto un grande sviluppo applicativo, soprattutto dal punto di vista del calcolo numerico. L'Analisi di Fourier è uno degli strumenti matematici principali della Teoria dei Segnali, con una infinità di applicazioni in una vasta gamma di discipline scientifiche: dalla matematica all'ingegneria, dall'astrofisica alla chimica.

L'Analisi di Fourier è anche largamente utilizzata nell'elaborazione dei segnali audio che riguardano, ad esempio, processi di riconoscimento vocale in indagini forensi [1], oppure diagnostica in campo medico [2]; ma da qualche decennio a questa parte, si sta sempre più consolidando nell'elaborazione del segnale audio musicale, sia nell'ambito della Teoria Musicale che nella produzione e post produzione della musica da ascoltare.

La letteratura riguardante le applicazioni dell'Analisi di Fourier ai segnali audio musicali è molto vasta. Giusto per citare qualche esempio: in [3] troviamo un sistema *frame-based* per la stima di multiple frequenze fondamentali basato sulla Short Time Fourier Transform (STFT); attraverso metodi di individuazione multitonale e quantizzazione ritmica si è convertito un segnale audio musicale in uno spartito leggibile da essere umano in [4]. Molti dei metodi disponibili per la trascrizione musicale sono basati sull'estrazione delle frequenze fondamentali usando strumenti come la Fast Fourier Transform (FFT) [5]–[7]. In [8] troviamo invece un metodo per la trascrizione automatica di segnali audio musicali basati sulla stima di multiple frequenze fondamentali congiunte.

Per completezza di informazione, bisogna dire, comunque, che la Trasformata di Fourier non è l'unico strumento di analisi dei segnali musicali. In [9], [10], per esempio, troviamo metodi sulla stima di tonalità in musica polifonica attraverso l'utilizzo delle wavelets.

Con il mio lavoro di tesi ho voluto semplicemente richiamare l'attenzione sull'applicazione dell'Analisi di Fourier ai segnali audio musicali, che sono segnali di mio particolare interesse. In questa tesi, nello specifico, ho voluto mostrare come l'Analisi di Fourier consenta di estrapolare alcune informazioni riguardanti l'intonazione degli strumenti musicali, mitigare i problemi legati al rumore presente nei segnali audio, mediante

semplici metodi di filtraggio. Inoltre, ho voluto mostrare anche qualche applicazione più avanzata mirata al riconoscimento degli accordi nella musica polifonica.

La tesi è strutturata nel seguente modo. Dopo aver richiamato alcune caratteristiche dei segnali, sia dal punto di vista generale che con lo specifico interesse ai segnali musicali (Capitolo 2), i capitoli 3, 4, e 5 sono stati dedicati ai richiami teorici di base dell'Analisi di Fourier per i segnali analogici (Capitolo 3) e per i segnali digitali (Capitolo 5), dopo aver trattato la Teoria del campionamento (fondamentale per passare dal mondo analogico a quello digitale), nel Capitolo 4. Le parti teoriche richiamate in questi capitoli derivano in primo luogo dalle conoscenze e competenze acquisite nelle lezioni di Matematica Applicata del Prof. Rodriguez, oltre che dal suo seminario di "Matlab-Simulink per l'Ingegneria", ma anche dal materiale didattico messo a disposizione dal Prof. Rodriguez, quali dispense e libri [11]. Nel Capitolo 6 ho riportato alcune nozioni basilari sulla teoria e rappresentazione musicale. Il Capito 7, infine, capitolo che costituisce il nucleo del mio lavoro di tesi, ho riportato i risultati ottenuti applicando alcune tecniche di analisi con Matlab su alcuni segnali audio registrati da me, con l'utilizzo di strumenti musicali reali oltre che con strumenti hardware e software.

# CAPITOLO 2.

## Segnali

### 2.1. Introduzione

Il termine “segnale” viene spesso utilizzato come sinonimo di una grandezza fisica misurabile che varia nel tempo e/o nello spazio o rispetto a qualche altra grandezza (variabile indipendente) quali, per esempio, la temperatura o altro. Solitamente, i segnali descrivono l'evoluzione di un determinato fenomeno fisico (onde o propagazione delle onde, immagini, video, ecc.) o la risposta di un oggetto, detto genericamente “sistema” (per esempio un sensore di un certo tipo, quali microfono, telecamera, termometri, circuiti elettrici, sistemi fisici naturali, macchine, ...), sollecitato da una determinata azione fisica. I segnali e i sistemi sono concetti di grande importanza per un ampio spettro di discipline scientifiche e tecnologiche, dalle telecomunicazioni al controllo di processi industriali, dall'idrologia alla geofisica, dall'elettronica alla biomedica, giusto per citarne alcune, e per una vasta gamma di applicazioni.

Le grandezze fisiche rappresentate da un segnale sono le più svariate quali, giusto per citarne qualcuna: l'intensità luminosa e il colore su uno schermo, nel caso di un segnale televisivo; la variazione della pressione dell'aria nel caso di un segnale musicale; la tensione elettrica o la corrente elettrica nel caso di un segnale misurato in un circuito elettrico o su un oggetto fisico naturale (per esempio, terreno) o artificiale; un campo elettromagnetico o un'onda elettromagnetica; e così via.

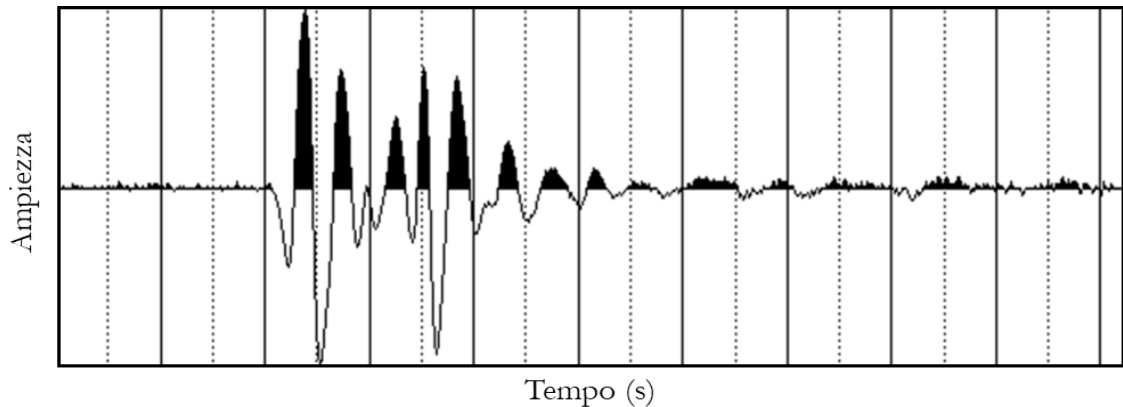
*Esempi.*

*Elettrocardiogramma.* L'elettrocardiogramma (Figura 2.1) è la registrazione dei potenziali elettrici che, generati nel nodo sino-atriale, si propagano lungo il muscolo cardiaco determinandone la contrazione ritmica. Il segnale è una tensione elettrica che varia nel tempo.



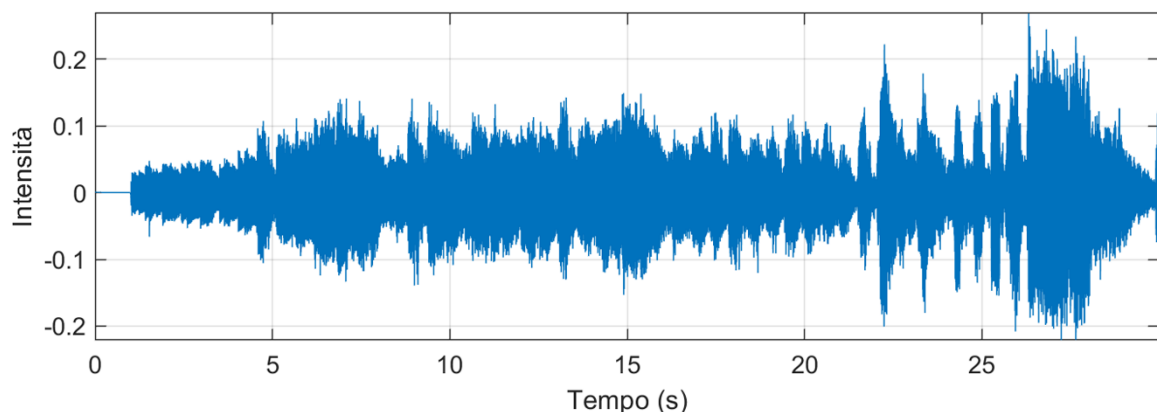
**Figura 2.1.** Esempio di segnale biomedico: elettrocardiogramma. Le curve in blu rappresentano una tensione elettrica che varia nel tempo.

*Sismogramma.* Un sismogramma (Figura 2.2.) è un segnale elettrico che viene generato da un sensore (geofono) in risposta ad una sollecitazione del terreno prodotta da una sorgente sismica. Esso contiene le informazioni relative all'evoluzione temporale di una grandezza fisica meccanica (sforzo, deformazione, spostamento, velocità di vibrazione, accelerazione di vibrazione) associata alla propagazione di un'onda sismica.



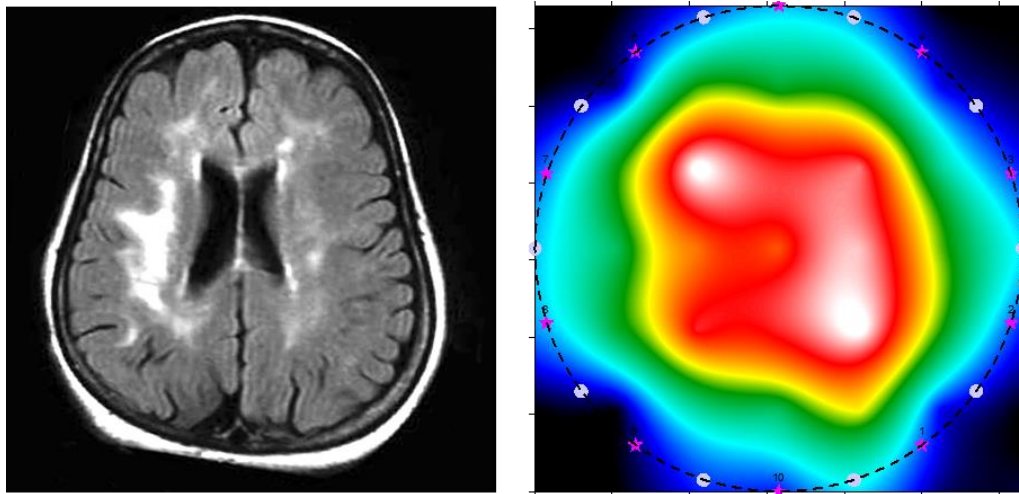
**Figura 2.2.** Esempio di segnale geofisico: sismogramma o traccia sismica. L'ampiezza o intensità rappresenta il valore di una grandezza meccanica (usualmente la velocità di vibrazione delle particelle del mezzo) che varia nel tempo in un punto dello spazio (in cui viene registrato).

*Segnale audio.* Un segnale audio (Figura 2.3) è un segnale elettrico che viene generato da un sensore (per esempio, un microfono) in risposta ad una sollecitazione meccanica dell'aria (ma anche di un fluido o di un solido) prodotta da una sorgente acustica. Esso contiene le informazioni relative all'evoluzione temporale della pressione sonora nell'aria associata alla propagazione di un'onda sonora. Il segnale audio è del tutto simile al segnale sismico di tipo *P* (onde sismiche di compressione e rarefazione). L'unica differenza riguarda il contenuto spettrale che nel caso sismico è concentrato verso le basse frequenze (usualmente inferiori a qualche decina di Hz).



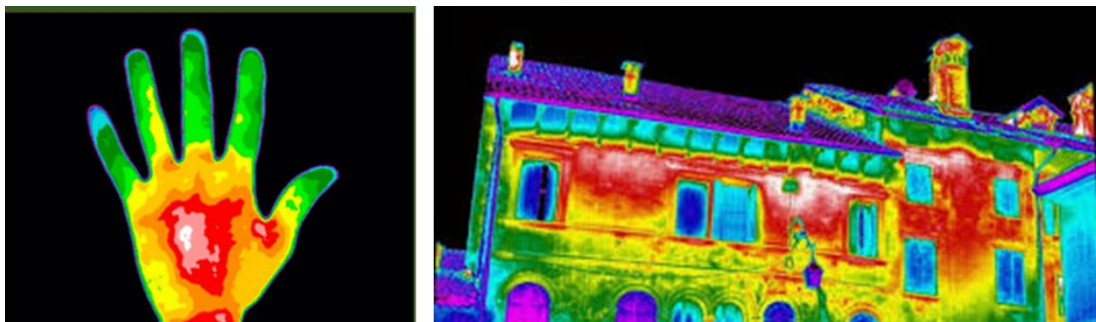
**Figura 2.3.** Esempio di segnale acustico. L'intensità rappresenta il valore della pressione sonora che varia nel tempo in un punto dello spazio (in cui viene registrato)

*Tomografie.* Il livello di grigio di un pixel (Figura 2.4a) è legato all'attenuazione indotta dal "pixel" sul fascio di raggi X, che dipende dalla composizione del "pixel" (osso, tessuto molle, vaso ecc.). Il segnale è quindi originato dall'interazione tra il sistema in studio (l'organismo) e un agente esterno (sorgente di raggi X). Esso fotografa la situazione in un certo istante; varia in funzione delle coordinate spaziali. In Figura 2.4b, il colore del pixel è legato alla velocità di propagazione delle onde sismiche (in questo caso onde S), velocità che dipende dal modulo di taglio e dalla densità del materiale che costituisce il pixel. Il segnale è quindi originato dall'interazione tra il sistema in studio (in questo caso il tronco di una palma) e un agente esterno (sorgente sismica).



**Figura 2.4.** (a) Tomografia assiale computerizzata di un cervello [12]; (b) tomografia sismica su una sezione orizzontale di un tronco di palma.

*Termografia.* La termografia è un'immagine in cui il colore del singolo pixel (Figura 2.5) è legato alla temperatura superficiale di un oggetto, che irradia delle radiazioni nel campo dell'infrarosso. Il segnale viene registrato da un sensore (termocamera) in risposta all'emissione, da parte dell'oggetto o corpo a temperatura diversa dallo zero assoluto, di radiazioni nel campo dell'infrarosso. È un segnale particolarmente utilizzato in medicina, nell'ingegneria civile e nell'agricoltura di precisione.



**Figura 2.5.** Esempio di termografie: (a) termografia di una mano (segnale biomedico scaricato da internet: <https://revistamedicinaintegrativa.com>); (b) termografia di un edificio – ingegneria civile (internet: <https://www.styrodur-italia.it>).

Più in generale, il segnale è un'entità contenente qualche tipo di informazione che può essere estratta, trasmessa o elaborata. I segnali vengono elaborati da sistemi; questi possono essere visti come apparati che rispondono a segnali di ingresso producendo segnali in uscita. Le tensioni o le correnti (funzioni del tempo) in ingresso e in uscita a un circuito elettrico sono esempi di segnali, mentre il circuito stesso è un esempio di sistema.

Da un punto di vista matematico, un segnale può essere descritto da una funzione del tipo  $y = f(t)$ , dove la variabile  $t$  può essere il tempo, lo spazio o altra grandezza. Nell'analisi dei segnali, usualmente si fa riferimento alla variabile tempo ma con il significato che può essere una qualunque altra variabile. In relazione alla natura continua o discreta della variabile indipendente e/o della funzione, si presentano seguenti casi:

1. La variabile tempo,  $t$ , assume valori reali oppure valori in un sottoinsieme discreto di numeri reali (ad esempio i multipli interi di  $t$ ). Nel primo caso, il segnale sarà detto a tempo continuo, nel secondo a tempo discreto. Ad esempio, campionando il segnale a tempo continuo  $f(t)$  agli istanti  $n \cdot \Delta t$  (dove  $n$  è un numero intero e  $\Delta t$  è un intervallo di tempo, detto intervallo di campionamento) si ottiene il segnale a tempo discreto  $f(n \cdot \Delta t)$ .
2. La variabile  $y$  assume valori reali oppure valori in un sottoinsieme finito di numeri reali (ad esempio, i  $2^m$  numeri codificabili in notazione binaria con  $m$  bit). Nel primo caso, il segnale sarà detto a valori continui, nel secondo a valori finiti.

Pertanto, i segnali vengono usualmente classificati in:

- segnali a valori continui e tempo continuo, detti anche segnali analogici;
- segnali a valori continui e tempo discreto;
- segnali a valori finiti e tempo continuo;
- segnali a valori finiti e tempo discreto, detti anche segnali digitali.

## 2.2. Alcuni segnali notevoli di base per la Teoria dei Segnali

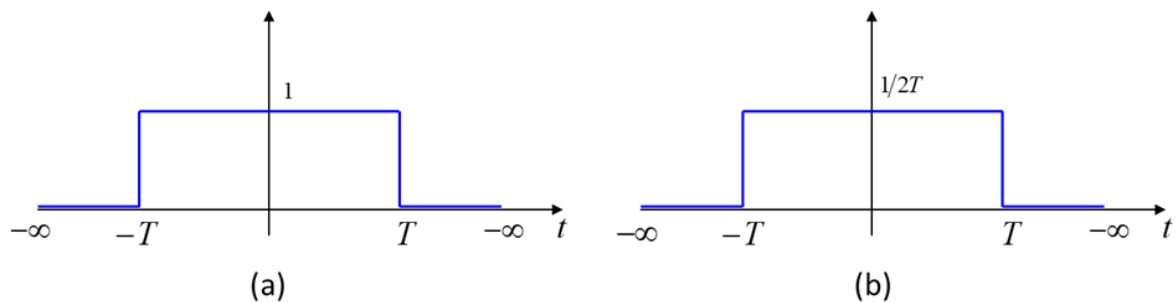
### 2.2.1. Funzione rettangolare (funzione box-car)

La funzione rettangolare, detta anche finestra rettangolare (o anche, in inglese, box-car function), è una funzione che assume un valore positivo costante e diverso da zero solo in un intervallo finito della variabile indipendente, che può essere il tempo, lo spazio, la frequenza temporale o il numero d'onda (o frequenza spaziale). Supponendo che la variabile indipendente sia il tempo  $t$  (ma al posto di  $t$  potrebbe essere utilizzata una delle altre variabili), essa è definita matematicamente dalla seguente relazione



$$\begin{cases} f(t)=1 & t \in [-T; T] \\ f(t)=0 & t \notin [-T; T] \end{cases} \quad (2.1)$$

dove i valori  $\pm T$  rappresentano gli estremi dell'intervallo temporale (o di altra variabile) in cui essa assume il valore diverso da zero. Qualche volta, viene definita in modo che sia di area (sottesa) unitaria. Con riferimento alla (2.1), in tal caso la funzione sarebbe definita  $f(t)=1/2T$  nell'intervallo  $[-T;T]$ . In Figura 2.6 è riportato il grafico della finestra rettangolare.



**Figura 2.6.** (a) Finestra rettangolare di ampiezza pari a 1 e larga  $2T$ ; (b) finestra rettangolare di area unitaria.

La funzione può essere definita anche come funzione bidimensionale, in cui le variabili indipendenti possono essere entrambe spaziali, oppure una spaziale e una temporale, entrambe frequenze spaziali o una frequenza spaziale e una frequenza temporale. Nel caso in cui le variabili sono il tempo, lo spazio, o lo spazio-tempo per il caso bidimensionale, si dice che la finestra è definita nel dominio del tempo; nel caso in cui le variabili sono le frequenze, spaziali o temporali, si dice che essa è definita nel dominio della frequenza.

La finestra rettangolare riveste un ruolo fondamentale nel trattamento dei segnali. Nel dominio del tempo, essa rappresenta la finestra di osservazione di un segnale, cioè l'intervallo temporale all'interno del quale è stato misurato il segnale o sono stati acquisiti i dati sperimentali. Nel caso di una registrazione di un segnale temporale, per esempio, gli estremi della variabile indipendente che delimitano la finestra costituiscono i tempi di inizio e fine registrazione. Nel dominio della frequenza, le finestre rettangolari sono particolarmente importanti per le tecniche di filtraggio. La finestra rettangolare viene chiamata filtro ideale: passabasso ideale, nel caso che la finestra sia definita a cavallo dell'origine delle frequenze, o passabanda ideale, nel caso in cui la finestra sia traslata lungo l'asse delle frequenze con i valori estremi entrambi positivi.

### 2.2.1. Impulso o delta di Dirac

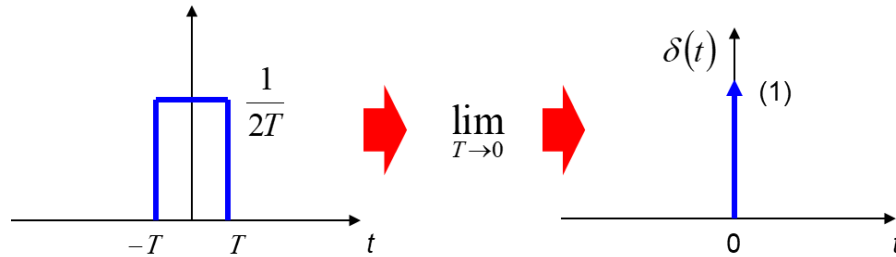
L'impulso, detto anche delta di Dirac, o  $\delta$ , è una distribuzione (o una funzione generalizzata) molto importante nella Teoria dei Segnali. La sua definizione è data da

$$\delta(t) = 0 \quad \text{per } t \neq 0 \quad (2.2)$$

con la condizione che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.3)$$

Essa può essere considerata come un caso limite di finestra rettangolare di area unitaria, in cui la larghezza temporale è infinitesima e l'ampiezza è infinita (Figura 2.7).



**Figura 2.7.** Se la larghezza della finestra rettangolare di area unitaria (a sinistra) tende a zero, essa degenera in un impulso (a destra): l'ampiezza della finestra diventa infinita ma con una area che resta unitaria.

Nell'analisi dei segnali sono importanti le seguenti proprietà.

- 1) È una funzione simmetrica; infatti, cambiando il segno della variabile indipendente non cambia il suo valore:

$$\delta(t) = \delta(-t); \quad (2.4)$$

- 2) Se viene scalata la variabile indipendente con un numero reale  $a$ , viene scalato il suo valore secondo la relazione

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t), \quad \text{con } a \neq 0; \quad (2.5)$$

- 3) Se una funzione  $f(t)$  viene moltiplicata per l'impulso  $\delta(t)$ , si ottiene

$$f(t) \cdot \delta(t) = f(0) \cdot \delta(t), \quad (2.6)$$

cioè, un impulso scalato dal valore della funzione  $f(t)$  calcolata in  $t = 0$ ;

- 4) Analogamente al caso precedente, se una funzione  $f(t)$  viene moltiplicata per l'impulso traslato lungo l'asse dei tempi  $\delta(t - t_0)$ , si ottiene

$$f(t) \cdot \delta(t - t_0) = f(t_0) \cdot \delta(t), \quad (2.7)$$

cioè, un impulso di ampiezza pari al valore della funzione calcolata in  $t = t_0$ ;

- 5) È l'elemento neutro per l'operazione convoluzione

$$f(t) * \delta(t) = f(t), \quad (2.8)$$

dove il simbolo  $*$  rappresenta l'operazione di convoluzione; secondo tale proprietà, se una funzione  $f(t)$  viene convoluta con l'impulso, la funzione  $f(t)$  resta invariata.

In relazione alla Trasformata di Fourier, infine, valgono le seguenti relazioni:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1, \quad (2.9)$$

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-i\omega t_0}. \quad (2.10)$$

dove il simbolo  $\mathcal{F}$  sta per trasformata di Fourier e  $\omega$  è la frequenza angolare, la variabile trasformata del tempo  $t$ .

Come per il caso della finestra rettangolare, anche per la funzione impulso la variabile indipendente può essere diversa dal tempo e può essere una variabile spaziale o anche una frequenza, temporale o spaziale. Inoltre, anche la funzione impulso può essere definita in due o più dimensioni.

### 2.3. Il segnale Suono.

Esistono diverse definizioni del termine suono, più o meno articolate e con diversi significati, che in alcuni casi focalizzano l'attenzione sugli aspetti percettivi (per esempio, sensazione stimolata negli organi dell'udito dalle vibrazioni nell'aria o in altri mezzi) e in altri quelli fisici e tecnici. Alcune definizioni sintetiche sono riportate nel "The American Heritage Dictionary of the English Language" [13]. Una prima definizione di tipo tecnico definisce il suono come: "*Vibrations transmitted through an elastic material or a solid, liquid, or gas, with frequencies in the approximate range of 20 to 20,000 hertz.*" Tale definizione è, probabilmente, quella più utilizzata dai fisici e dagli ingegneri, secondo cui, appunto, il suono è una pressione che si propaga in un mezzo elastico (aria, liquido o anche solido) e che può essere misurata, registrata digitalmente e analizzata. Un'altra definizione, invece, focalizzando l'attenzione sugli aspetti percettivi, definisce il suono come: "*The sensation stimulated in the organs of hearing by such vibrations in the air or other medium.*"

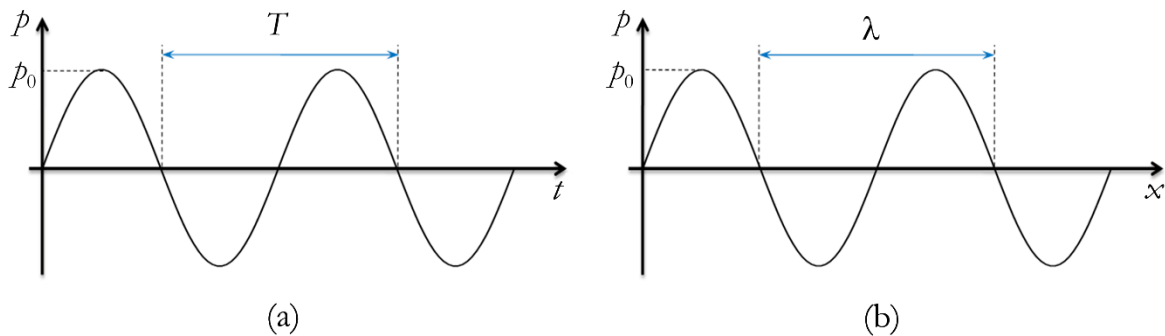
Da un punto di vista fisico, un segnale sonoro o audio è generato da qualche oggetto che, sollecitato da uno sforzo meccanico, diventa un oggetto vibrante (sorgente sonora) come le corde vocali di una persona (o altro animale), le corde degli strumenti a corda (come chitarra, violino, pianoforte, ecc.), le membrane dei tamburi, e così via. Queste vibrazioni causano spostamenti e oscillazioni delle particelle del mezzo circostante la sorgente sonora, causando, allo stesso tempo, compressioni e rarefazioni. La pressione, variabile nel tempo, si propaga nel mezzo come un'onda, dalla sorgente fino al ricevitore, che può essere un ascoltatore o un sensore (per esempio, un microfono), e che può quindi essere percepita come suono, nel caso dell'ascoltatore, o può essere convertita in un segnale elettrico, nel caso di un sensore. Nel caso più semplice, l'onda sonora può essere rappresentata in termini di pressione ( $p$ ) da una funzione armonica (una senoide) che varia nello spazio e nel

tempo. Quindi, considerando per semplicità una sola direzione  $x$ , essa può essere espressa in uno dei seguenti modi equivalenti

$$p = p_0 \sin(kx - \omega t), \quad (2.11)$$

$$p = p_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right), \quad (2.12)$$

dove  $p_0$  è l'ampiezza massima,  $\lambda$  è la lunghezza d'onda,  $T$  è il periodo,  $k = 2\pi/\lambda$  è il numero d'onda, e  $\omega = 2\pi/T$  è la frequenza angolare, quest'ultima legata alla frequenza  $f$ , in Hz, dalla relazione  $\omega = 2\pi f$ . Graficamente, la variazione della pressione è descritta dal grafico pressione-tempo della Figura 2.8a, nel caso in cui si consideri la pressione in un determinato punto (fissando il valore di  $x$  nelle relazioni (2.11) o (2.12)), o dal grafico pressione-spazio della Figura 2.8b, nel caso in cui si consideri la pressione lungo la direzione  $x$ , in un determinato istante  $t$  (fissando il valore di  $t$  nelle relazioni (2.11) o (2.12)).



**Figura 2.8.** (a) Forma d'onda sinusoidale che varia nel tempo; (b) forma d'onda sinusoidale che varia nello spazio.

Secondo Fletcher (1934) [14], dal punto di vista fisico-tecnico, le caratteristiche quantitative, misurabili, sono l'intensità, la frequenza fondamentale o altezza, e la struttura armonica, che sono correlate rispettivamente alle caratteristiche percettive (o soggettive) di volume percepito (loudness), tono (pitch) e timbro. Un'altra caratteristica è la durata.

*Altezza.* L'altezza dipende dalla frequenza delle vibrazioni. Più grande è la frequenza, più acuto è il suono; più piccola è la frequenza, più grave è il suono. Essendo una frequenza, l'altezza di un suono viene misurata in Hz. La nota usata come punto di riferimento per l'accordatura degli strumenti (diapason) corrisponde alla nota LA4, la cui frequenza è di 440 Hz. L'orecchio umano può percepire suoni compresi tra 16 e 20.000 Hz. I suoni con frequenza minore di 16 Hz sono detti infrasuoni mentre quelli con frequenza superiore ai 20 kHz sono detti ultrasuoni. Un pianoforte emette suoni compresi tra 27.5 Hz (A0) e 4186 Hz (C8).

*Durata.* La durata di un suono indica l'estensione nel tempo del fenomeno sonoro. In musica, la durata del suono classifica i suoni in lunghi o brevi, che nella notazione musicale si traducono, per esempio, nei valori breve, semibreve, minima semiminima, ecc.

*Intensità.* L'intensità è la caratteristica del suono che permette di riconoscere il volume sonoro. Essa indica la forza con cui è prodotto il suono. Nelle notazioni musicali si parla di piano, mezzoforte, forte, ecc. L'intensità è la caratteristica sonora associata alla percezione fisica del volume di un suono ed è determinata dalla pressione che l'onda sonora esercita sul timpano. Per misurare il volume percepito di un suono si fa spesso riferimento al livello sonoro, che viene misurato in decibel (dB), la cui definizione è data dall'espressione

$$L_p = 20 \log \left( \frac{p}{p_0} \right) \quad (2.11)$$

dove  $p$  indica la pressione quadratica media, e  $p_0$  è una pressione di riferimento, detta "soglia del silenzio", che corrisponde alla più piccola variazione di pressione udibile dall'orecchio umano ed è pari a 20  $\mu$ Pa.

*Timbro.* Quando si suona una singola nota su uno strumento, il suono o il tono musicale risultante è molto diverso da un semplice tono puro. Il tono musicale è dato dalla sovrapposizione di più toni puri, le cosiddette armoniche, le cui frequenze differiscono per un multiplo intero da una certa frequenza, detta fondamentale.

Il timbro è la caratteristica che consente di riconoscere la sorgente sonora: strumento, animale, fenomeno naturale. Esso dipende dalle caratteristiche della sorgente, quali il materiale, la forma e le dimensioni, e dal modo in cui il suono viene prodotto. Il timbro dipende dalla forma d'onda delle vibrazioni, che a sua volta dipende dalla frequenza degli armonici, suoni secondari di frequenza superiore che vengono emessi contemporaneamente al suono fondamentale. Un suono prodotto da un corpo vibrante, infatti, non è mai puro, ma è costituito da un insieme di suoni in cui al suono fondamentale se ne aggiungono altri più acuti e meno intensi: sono questi gli armonici. Nonostante non siano udibili singolarmente a causa della loro debole intensità, contribuiscono in maniera fondamentale alla timbrica di uno strumento.

# CAPITOLO 3.

## Analisi di Fourier

### 3.1. Introduzione

Una funzione del tempo può essere espressa, mediante trasformazioni matematiche, come funzione della frequenza. Il termine spettro viene generalmente utilizzato per descrivere la variazione di determinate grandezze fisiche in funzione di alcuni parametri quali la frequenza. Quando un segnale viene espresso in funzione della frequenza si dice che è stato trasformato in uno spettro. Matematicamente, lo spettro di un segnale  $f(t)$  è dato dalla funzione  $F(\omega)$ , dove  $\omega$  rappresenta la frequenza angolare. La funzione  $F(\omega)$  è, generalmente, una funzione complessa e può essere rappresentata o in forma algebrica:

$$F(\omega) = a(\omega) + ib(\omega) \quad (3.1)$$

o, in forma esponenziale:

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{i\phi(\omega)} \quad (3.2)$$

dove

$$|F(\omega)| = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)} \quad (3.3)$$

è lo spettro d'ampiezza, mentre

$$\Phi(\omega) = \arctan\left(\frac{b(\omega)}{a(\omega)}\right) + 2n\pi \quad (3.4)$$

è lo spettro di fase, con  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

### 3.2. Serie di Fourier

#### 3.2.1. Teorema di Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) formulò il teorema che porta il suo nome nella sua più grande opera, *Théorie Analytique de la Chaleur*, in cui trattò la teoria matematica sulla conduzione del calore. Egli stabilì le equazioni differenziali alle derivate parziali che governano la diffusione del calore e le risolse utilizzando le serie di funzioni trigonometriche.

Il Teorema di Fourier afferma che una qualunque funzione  $f(t)$ , sotto determinate condizioni, può essere espressa come somma di un numero infinito di termini sinusoidali (e/o cosinusoidali), ognuno dei quali ha una specifica ampiezza, fase e frequenza. Le

condizioni a cui deve sottostare la funzione  $f(t)$  affinché valga il Teorema di Fourier, note come condizioni di Dirichlet, sono le seguenti:

1.  $f(t)$  deve essere integrabile in  $[-T; T]$ ;
2. Deve valere il teorema della convergenza della serie di Fourier.

*Teorema della convergenza della serie di Fourier*

Sia  $f(t)$  regolare a tratti su  $[-T; T]$ ; allora:

1. se la  $f(t)$  è continua in  $t_0 \in (-T, T)$ , la serie di Fourier assume in  $t_0$  il valore  $f(t_0)$ ;
2. se  $t_0 \in (-T, T)$  e la  $f(t)$  è discontinua in  $t_0$ , la serie di Fourier converge a

$$\frac{1}{2} [f(t_{0+}) + f(t_{0-})]; \quad (3.5)$$

3. se esistono finiti  $f(-T^+)$  e  $f(T^-)$ , la serie di Fourier converge a

$$\frac{1}{2} [f(-T^+) + f(T^-)] \quad (3.6)$$

sia in  $-T$  che in  $T$ .

### 3.2.2. Serie di Fourier

In accordo con il teorema di Fourier, una funzione  $f(t)$  che soddisfa le condizioni di Dirichlet può essere rappresentata dalla seguente serie infinita, formalmente chiamata Serie di Fourier:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi}{T} t\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi}{T} t\right) \right]. \quad (3.7)$$

Le costanti  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$  sono numeri reali pari a

$$a_0 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt, \quad (3.8)$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{T} t\right) dt, \quad (3.9)$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{T} t\right) dt, \quad (3.10)$$

in cui  $2T$  è il periodo della funzione. La costante  $a_0$  è il valore medio della funzione nell'intervallo  $[-T; T]$  e rappresenta la componente costante; i coefficienti  $a_n$  e  $b_n$  sono i Coefficienti di Fourier e il loro calcolo va sotto il nome di Analisi di Fourier o Analisi

Armonica. In accordo con il Teorema di Fourier, una funzione  $f(t)$  che soddisfa le condizioni di Dirichlet può essere rappresentata da una somma infinita di sinusoidi, le cui frequenze sono multipli interi della frequenza  $\pi/T$ , che è detta fondamentale mentre i suoi multipli interi sono detti armoniche. Se  $a_n$  e  $b_n$  vengono disegnati in funzione della frequenza, si ottiene un numero discreto di linee spettrali, posizionate ad intervalli fissi di  $\pi/T$ .

La serie di Fourier (3.7) può essere rappresentata anche in forma complessa, trasformando i termini sinusoidali e cosinusoidali mediante le formule di Eulero. Le formule di Eulero sono date da

$$e^{i\frac{n\pi}{T}t} = \cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right) \quad (3.11)$$

e

$$e^{-i\frac{n\pi}{T}t} = \cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) - i \sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right). \quad (3.12)$$

Sommando e sottraendo membro a membro le (3.11) e (3.12) si ottengono le espressioni

$$\cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) = \frac{e^{i\frac{n\pi}{T}t} + e^{-i\frac{n\pi}{T}t}}{2} \quad (3.13)$$

e

$$\sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right) = \frac{e^{i\frac{n\pi}{T}t} - e^{-i\frac{n\pi}{T}t}}{2i} \quad (3.14)$$

Per cui, sostituendo le espressioni (3.13) e (3.14) nella (3.7), la Serie di Fourier può essere scritta

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \right] = \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \frac{e^{i\frac{n\pi t}{T}} + e^{-i\frac{n\pi t}{T}}}{2} - ib_n \frac{e^{i\frac{n\pi t}{T}} - e^{-i\frac{n\pi t}{T}}}{2} \right) = \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{i\frac{n\pi t}{T}} \frac{a_n - ib_n}{2} + e^{-i\frac{n\pi t}{T}} \frac{a_n + ib_n}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ponendo, quindi,

$$a_0 = c_0, \quad (3.16)$$



$$\frac{a_n - ib_n}{2} = c_n, \quad (3.17)$$

e

$$\frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n} \quad (3.18)$$

nella (3.15), si ottiene la forma complessa della serie di Fourier

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( c_n e^{\frac{i n \pi}{T} t} + c_{-n} e^{-\frac{i n \pi}{T} t} \right) \quad (3.19)$$

che, in forma compatta, estendendo la sommatoria da  $-\infty$  a  $+\infty$ , può essere scritta come

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i n \pi}{T} t} \quad (3.20)$$

La sequenza dei moduli dei coefficienti di Fourier complessi,  $c_n$  (per  $-\infty < n < \infty$ ), costituisce lo *spettro di ampiezza* del segnale  $f(t)$ . La sequenza degli argomenti degli stessi coefficienti è detta *spettro di fase*.

### 3.2.3. Esempi di Serie di Fourier

#### *Funzione sinusoidale.*

Si consideri la funzione

$$f(t) = \sin(\omega_0 t), \quad (3.21)$$

dove

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}$$

è la frequenza angolare della funzione e  $T$  è il semiperiodo. Sviluppando la (3.20) si ha

$$f(t) = \dots + c_{-1} e^{i\omega_0 t} + c_0 + c_1 e^{i\omega_0 t} + \dots \quad (3.22)$$

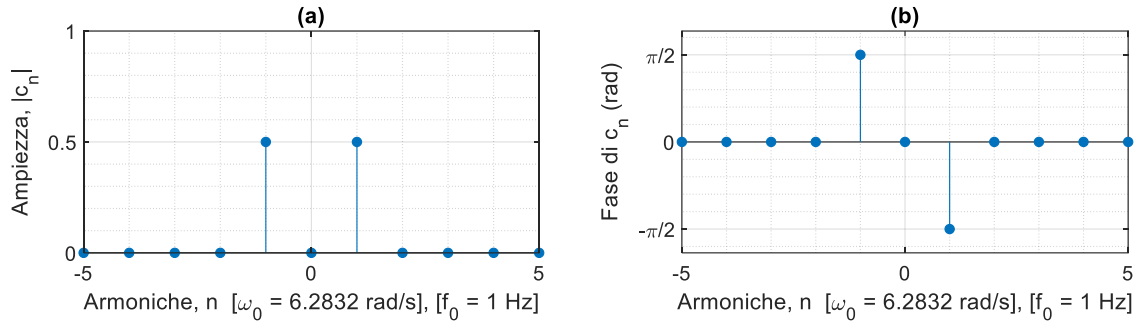
mentre, dall'applicazione delle formule di Eulero risulta:

$$f(t) = \sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2i} e^{i\omega_0 t} - \frac{1}{2i} e^{-i\omega_0 t}, \quad (3.23)$$

Pertanto, uguagliando membro a membro si ottengono i seguenti coefficienti di Fourier:

$$c_{-1} = -\frac{1}{2i}; \quad c_1 = \frac{1}{2i}; \quad \text{e } c_n = 0 \quad \text{per } n \neq \pm 1. \quad (3.24)$$

In Figura 3.3 sono rappresentati graficamente i coefficienti di una sinusoide di periodo  $2T = 1$  s.



**Figura 3.3.** Analisi di Fourier di una funzione sinusoidale con frequenza di 1 Hz. Coefficienti complessi della Serie di Fourier: (a) ampiezza; (b) fase.

*Funzione cosinusoidale.*

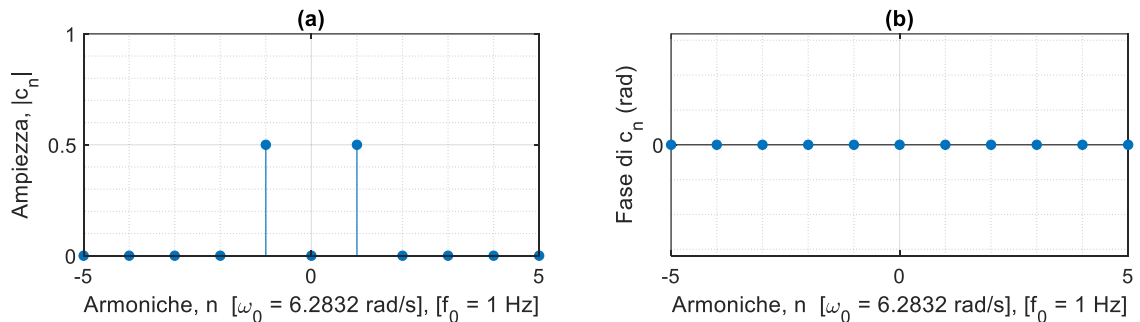
Con la stessa procedura vista per la funzione sinusoidale per la funzione coseno

$$f(t) = \cos(\omega_0 t), \quad (3.25)$$

con frequenza  $\omega_0$ , si ottengono i seguenti coefficienti complessi di Fourier

$$\begin{aligned} c_{-1} &= \frac{1}{2} \\ c_1 &= \frac{1}{2} \\ c_n &= 0 \quad \text{per } n \neq \pm 1 \end{aligned}, \quad (3.26)$$

rappresentati graficamente nella Figura 3.4, per una cosinusoide di periodo  $2T = 1$  s.



**Figura 3.4.** Analisi di Fourier di una funzione cosinusoidale con frequenza di 1 Hz. Coefficienti complessi della Serie di Fourier: (a) ampiezza; (b) fase.

### 3.3. Trasformata di Fourier

In accordo con il Teorema di Fourier, la serie di Fourier è uno strumento di analisi valido per le funzioni periodiche. Poiché non tutte le funzioni sono periodiche, al fine di poter disporre di un adeguato strumento di analisi anche per le funzioni non periodiche, occorre estendere l'idea dell'analisi di Fourier anche a queste modificando opportunamente le relazioni valide per le funzioni periodiche. In particolare, per le funzioni non periodiche si

suppone che esse siano comunque periodiche con un periodo che si estende all'infinito; cioè, si suppone che il periodo della funzione  $T \rightarrow \infty$  o, in altri termini, che il periodo sia  $[-\infty; \infty]$ . Ciò significa che l'intervallo finito di frequenza angolare  $\Delta\omega = 2\pi/T$  ( $\Delta f = 1/T$ ) diventi infinitamente piccolo; cioè,  $\Delta\omega \rightarrow d\omega$  ( $\Delta f \rightarrow df$ ). Con tale ipotesi, la sommatoria per intervalli finiti  $\Delta\omega$  della Serie di Fourier diventa un'integrale in  $d\omega$ . Si può dimostrare che per una data funzione non periodica  $f(t)$  valgono le seguenti relazioni formali

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.27)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.28)$$

dette rispettivamente Trasformata di Fourier e Trasformata inversa di Fourier. Una condizione sufficiente per l'esistenza della Trasformata di Fourier di  $f(t)$  è che la  $f(t)$  sia sviluppabile in serie di Fourier in un qualunque intervallo  $[-T; T]$  e sia inoltre assolutamente integrabile sulla retta [11], ossia che esista finito l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt. \quad (3.29)$$

L'equazione (3.27) esprime l'Analisi di Fourier della funzione  $f(t)$ , mentre l'equazione (3.28) esprime la Sintesi di Fourier della funzione  $f(t)$ , cioè la sintesi delle diverse componenti spettrali di  $F(\omega)$  nella funzione originale  $f(t)$ .

La Trasformata di Fourier gode di tante proprietà, le principali delle quali sono elencate nella Tabella 3.1.

**Tabella 3.1** – Principali proprietà della Trasformata di Fourier

PROPRIETÀ	$f(t)$	$F(\omega)$
Linearità	$c_1 f_1(t) \pm c_2 f_2(t)$	$c_1 F_1(\omega) \pm c_2 F_2(\omega)$
Simmetria	$F(\pm t)$	$2\pi f(\mp \omega)$
Dilatazione	$f(ct)$	$\frac{1}{ c } F\left(\frac{\omega}{c}\right)$
Ritardo temporale	$f(t \pm a)$	$e^{\pm i a \omega} F(\omega)$
Derivata	$f'(t)$	$i\omega \cdot F(\omega)$
Convoluzione	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$
Prodotto	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$F_1(\omega) * F_2(\omega)$
Modulazione	$f(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2} \cdot [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]$
	$f(t) \cdot \sin(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2i} \cdot [F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)]$

### 3.3.1. Esempi notevoli di Trasformata di Fourier

Qui di seguito vengono riportate le Trasformate di Fourier di alcune funzioni notevoli, particolarmente importanti per il trattamento dei segnali.

*Funzione sinusoidale.*

Si consideri la funzione

$$f(t) = A \sin(\omega_0 t), \quad (3.30)$$

dove  $\omega_0$  è la frequenza angolare e  $A$  è l'ampiezza massima. Dalle formule di Eulero si può scrivere

$$f(t) = \frac{\pi A}{i} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) = \frac{\pi A}{i} (e^{i\omega_0 t} - e^{i(-\omega_0)t}). \quad (3.31)$$

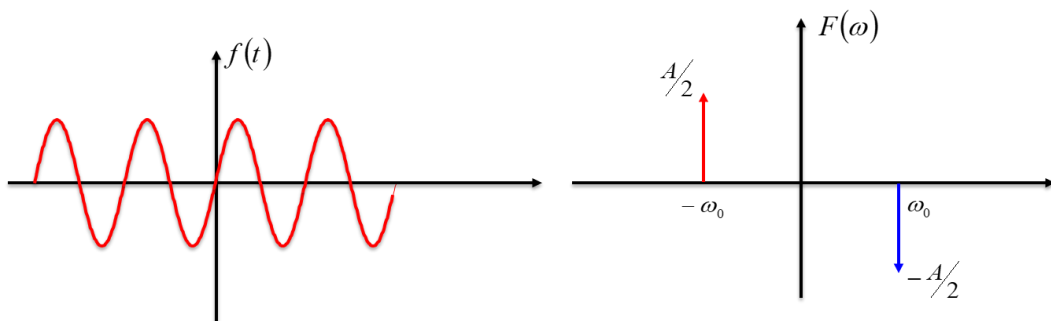
Utilizzando l'espressione formale della trasformata di Fourier, si ottiene

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{A}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\omega_0 t} - e^{i(-\omega_0)t}) \cdot e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{\pi A}{i} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \end{aligned} \quad (3.31)$$

ricordando che per l'impulso valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} &= e^{-i\omega t_0} \\ \mathcal{F}\{\delta(\omega - \omega_0)\} &= e^{i\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Graficamente si ha (Figura 3.6)



**Figura 3.6.** Spettro di Fourier della funzione sinusoidale. I due impulsi, posizionati  $-\omega_0$  e a  $\omega_0$ , hanno verso opposto per indicare che la fase è opposta.

*Funzione Finestra rettangolare (box-car)*

Sia  $f(t)$  una funzione rettangolare di area unitaria, definita da

$$\begin{cases} f(t) = \frac{1}{2T} & t \in [-T; T] \\ f(t) = 0 & t \notin [-T; T] \end{cases} \quad (3.33)$$

Utilizzando l'espressione formale della Trasformata di Fourier, si ha

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-T}^T \frac{1}{2T} e^{-i\omega t} dt. \quad (3.34)$$

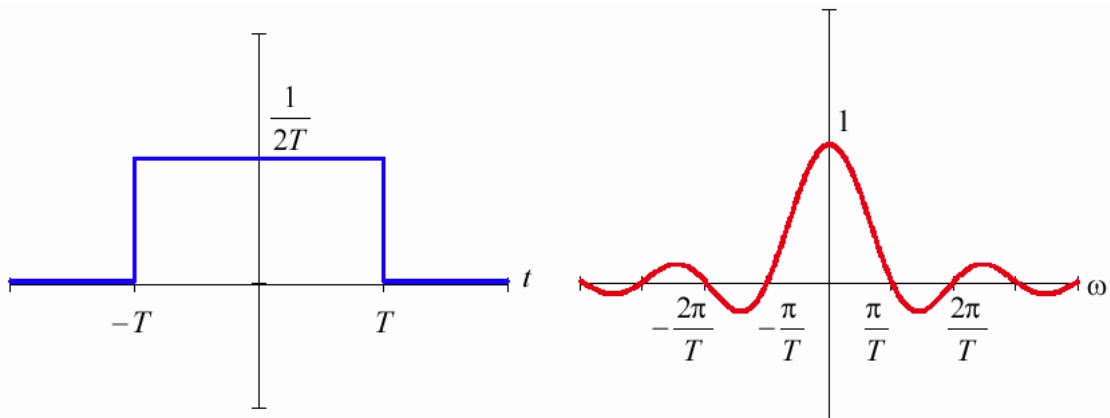
Effettuando la sostituzione di variabile  $z = -i\omega t$  si si ottiene

$$\frac{1}{2T} \int_{-i\omega T}^{i\omega T} e^z \frac{dz}{i\omega} = \frac{1}{2i\omega T} [e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}], \quad (3.35)$$

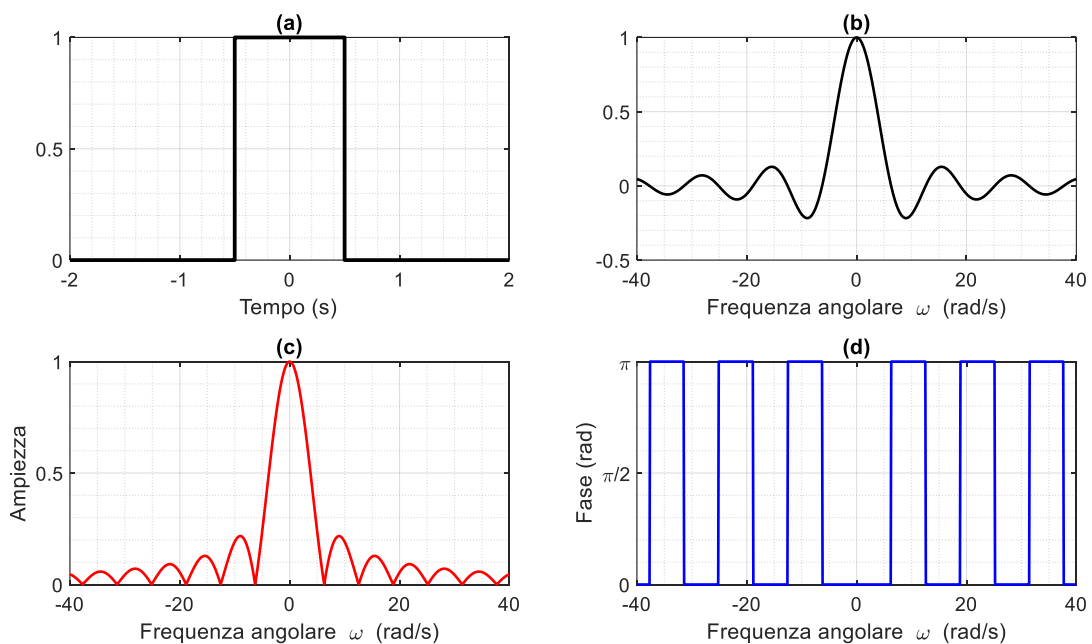
da cui, mediante le formule di Eulero, si ricava

$$F(\omega) = \frac{\sin \omega T}{\omega T} = \text{sinc}(\omega T) \quad (3.36)$$

Lo spettro di Fourier della funzione rettangolare è dato dalla funzione reale “seno cardinale”. La Figura 3.7 mostra il grafico della funzione (3.33) e del suo spettro (3.36). La Figura 3.8, invece, mostra il caso di una finestra rettangolare larga 1 s e di ampiezza 1.



**Figura 3.7.** Spettro di Fourier della funzione rettangolare.



**Figura 3.8.** Spettro di Fourier della funzione rettangolare.

### Impulso o delta di Dirac

L'impulso è definito da

$$\delta(t) = 0 \quad \text{per } t \neq 0 \quad (3.37)$$

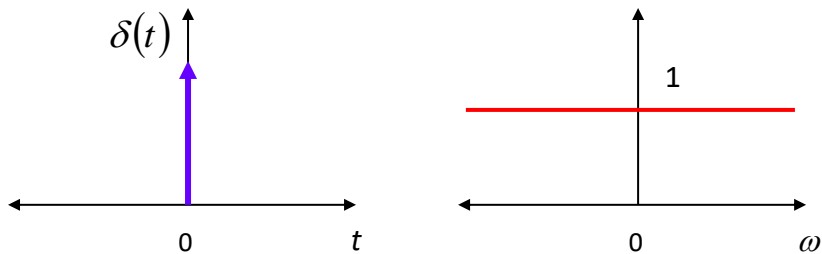
con

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (3.38)$$

Calcolando lo spettro con l'espressione formale della Trasformata di Fourier, tenendo conto della definizione e della proprietà, si ottiene

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1 \quad (3.39)$$

Quindi, l'impulso ha uno spettro reale la cui ampiezza vale 1 per qualunque frequenza (Figura 3.9).



**Figura 3.9.** Rappresentazione dell'impulso nel dominio del tempo (sinistra) e spettro di Fourier dell'impulso (destra).

Quando l'impulso viene traslato nel tempo di  $t_0$ , lo spettro di ampiezza resta invariato, mentre lo spettro di fase diventa una funzione lineare della frequenza  $\omega$ :  $\Phi(\omega) = \omega t_0$ .

# CAPITOLO 4.

## Campionamento dei segnali

### 4.1. Introduzione

In tantissimi ambiti scientifici, che vanno dalla Fisica alla Chimica, dalla Biologia alla Medicina, dalla Geofisica all'Ingegneria (elettrica, elettronica, informatica, civile, ambientale, ecc.), giusto per citarne qualcuno, c'è la necessità di acquisire, registrare, elaborare ed interpretare dati misurati sperimentalmente. Nella realtà, tutti i fenomeni naturali (per esempio, la propagazione delle onde elettromagnetiche, sismiche, acustiche, o le variazioni spazio-temporali dei campi elettrico, magnetico e gravimetrico, ecc. ecc.) sono descritti da segnali analogici, cioè da funzioni continue di variabile continua. Per poter elaborare i dati con un calcolatore, essi devono essere campionati o convertiti in formato digitale.

### 4.2. Campionamento ideale

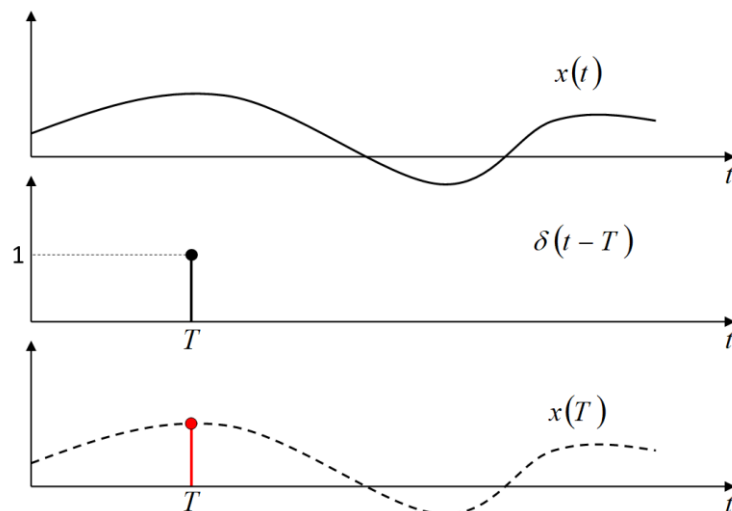
Sia  $x(t)$  un segnale analogico che deve essere campionato. Se moltiplichiamo il segnale  $x(t)$  per l'impulso discreto:

$$\delta(t-T) = \begin{cases} 1 & \text{per } t=T \\ 0 & \text{per } t \neq T \end{cases} \quad (4.1)$$

si ottiene il valore della funzione  $x(t)$  al tempo  $T$ :

$$x(t) \cdot \delta(t-T) = x(T) \quad (4.2)$$

graficamente mostrato in Figura 4.1



**Figura 4.1.** Rappresentazione grafica del prodotto tra una funzione analogica e l'impulso  $\delta(t)$  traslato in  $t = T$ .

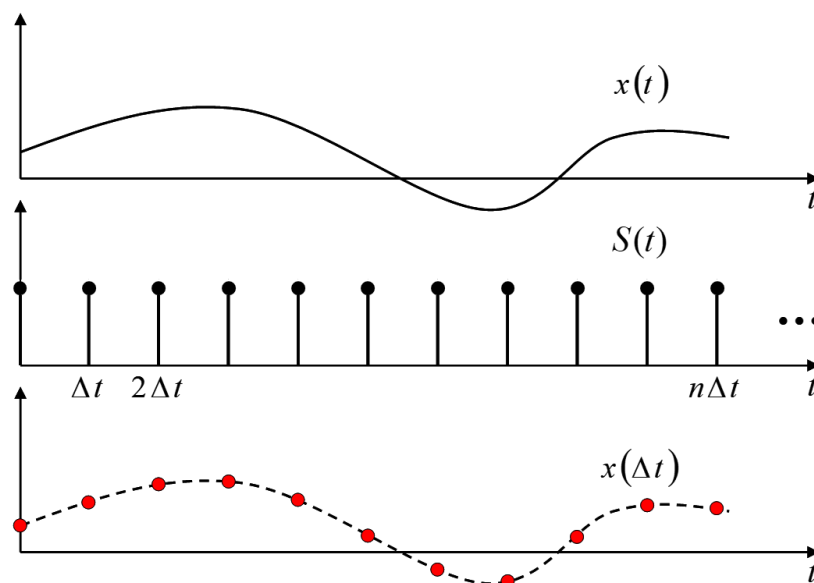
Ripetendo l'operazione con diversi valori di  $T$  si potranno ottenere diversi valori (campioni) della funzione. Si consideri la funzione

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t), \quad (4.3)$$

costituita da una serie infinita di impulsi equispaziati di  $\Delta t$ ; moltiplicando tale funzione per il segnale  $x(t)$  si ottengono infiniti campioni del segnale equispaziati di  $\Delta t$ . Quindi, da un punto di vista matematico, il processo di campionamento ideale è descritto dal prodotto del segnale per la funzione  $S(t)$

$$x_n = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t) \delta(t - n\Delta t) \quad (4.4)$$

graficamente mostrato in Figura 4.2.



**Figura 4.2.** Rappresentazione grafica del prodotto tra una funzione analogica e la funzione Comb con passo  $\Delta t$ .

La funzione  $S(t)$  è detta per questo motivo funzione di campionamento. Essa è anche detta funzione *Comb* o, per il suo aspetto, funzione “a pettine”.

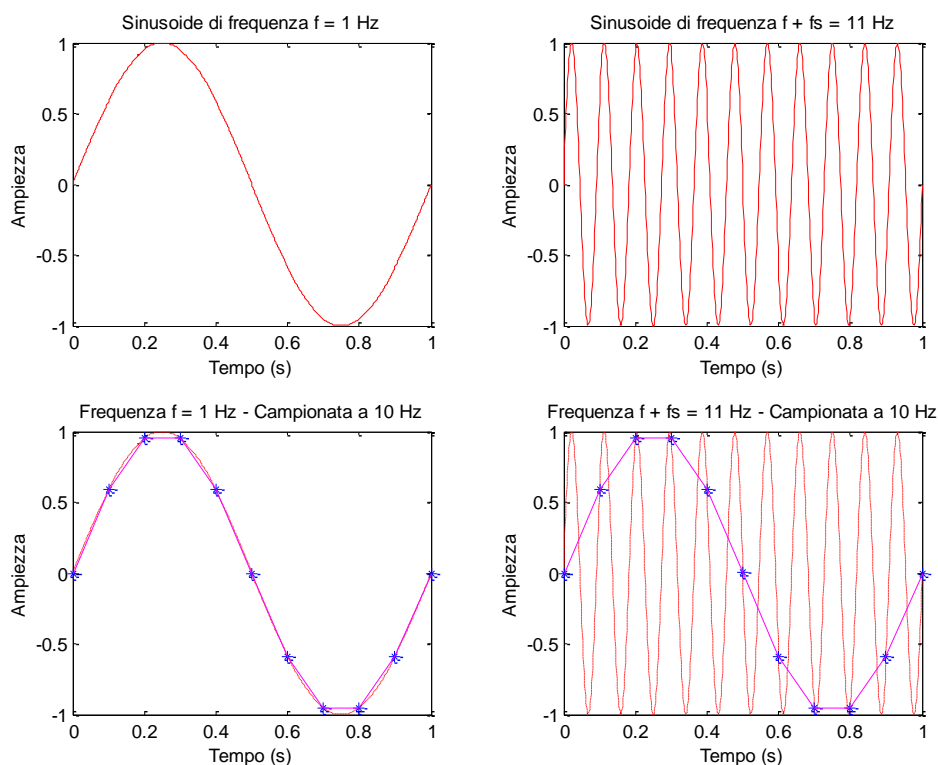
Il principale problema da considerare in un'operazione di campionamento è la scelta dell'intervallo di campionamento  $\Delta t$  o del suo inverso detto frequenza di campionamento  $f_s = 1/\Delta t$ . Con quale frequenza si deve campionare un segnale affinché si possa ricostruire senza perdita di informazione?



### 4.3. Analisi del campionamento nel dominio del tempo

#### 4.3.1 Aliasing

Il campionamento di un segnale analogico è un'operazione che, se eseguita in modo non ottimale, può produrre effetti indesiderati. Per capire l'effetto del campionamento, come esempio, si consideri un segnale sinusoidale di frequenza  $f = 1$  Hz, ampiezza  $A = 1$  e fase iniziale  $\varphi = 0$  rad, e si supponga di campionarlo con una frequenza  $f_s = 10$  Hz. Si consideri, poi, un altro segnale sinusoidale di uguale ampiezza, stessa fase iniziale ma di frequenza  $f_1 = f_s + f = 11$  Hz, e si supponga di campionarlo ancora con una frequenza  $f_s = 10$  Hz. Come si può osservare dalla Figura 4.3, il campionamento produce due identiche sequenze di campioni, cioè le due sinusoidi discrete sono indistinguibili.



**Figura 4.3.** Esempio di campionamento di due sinusoidi che produce una stessa sequenza di campioni

Generalizzando il ragionamento, si consideri il segnale analogico  $x(t)$

$$x(t) = A \sin[2\pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi], \quad (4.5)$$

dove  $A$  è l'ampiezza,  $f_0$  la frequenza e  $\varphi$  la fase iniziale. Campionando il segnale con un intervallo di campionamento  $\Delta t$  (o con una frequenza di campionamento  $f_s = 1/\Delta t$ ) si ottiene:

$$x_n = x(n\Delta t) = A \sin[2\pi \cdot f_0 \cdot n\Delta t + \varphi] \quad (4.6)$$

Si consideri, quindi, un altro segnale analogico,  $y(t)$ , di uguale ampiezza, uguale fase iniziale, ma con frequenza pari a  $f_0 + l \cdot f_s$ , in cui  $l$  è un numero intero diverso da zero:

$$y(t) = A \sin[2\pi \cdot (f_0 + l \cdot f_s) \cdot t + \varphi] \quad (4.7)$$

Campionando questo segnale con lo stesso intervallo di campionamento  $\Delta t$  si ottiene:

$$\begin{aligned} y_n = y(n\Delta t) &= A \sin[2\pi \cdot (f_0 + l \cdot f_s) \cdot n\Delta t + \varphi] = \\ &= A \sin[2\pi \cdot f_0 \cdot n\Delta t + 2\pi \cdot l \cdot f_s \cdot n\Delta t + \varphi] = \\ &= A \sin[2\pi \cdot f_0 \cdot n\Delta t + 2\pi \cdot n \cdot l + \varphi] = \\ &= A \sin[2\pi \cdot f_0 \cdot n\Delta t + \varphi] = x_n \end{aligned} \quad (4.8)$$

essendo  $f_s \cdot \Delta t = 1$  e  $\sin(\theta + 2\pi l) = \sin \theta$ . Quindi, il segnale campionato  $y_n$  è indistinguibile dal segnale  $x_n$ . Inoltre, poiché  $l$  è un numero intero qualunque, esisteranno infinite sinusoidi che campionate daranno la stessa sequenza di campioni  $x_n$ . Le frequenze  $f_0 + l \cdot f_s$  sono dette frequenze *alias* della frequenza  $f_0$  rispetto alla frequenza di campionamento  $f_s$ : tutte le frequenze appaiono uguali a  $f_0$  quando vengono campionate con  $f_s$ .

#### 4.3.2 Folding

Si consideri ancora lo stesso segnale sinusoidale di frequenza  $f = 1$  Hz, ampiezza  $A = 1$  e fase iniziale  $\varphi = 0$  rad, e un secondo segnale sinusoidale di stessa ampiezza, stessa fase iniziale ma di frequenza  $f_1 = f_s - f = 9$  Hz. Campionando i due segnali con una frequenza di campionamento  $f_s = 10$  Hz, i valori dei due segnali saranno uguali in valore assoluto ma di segno opposto (Figura 4.4).

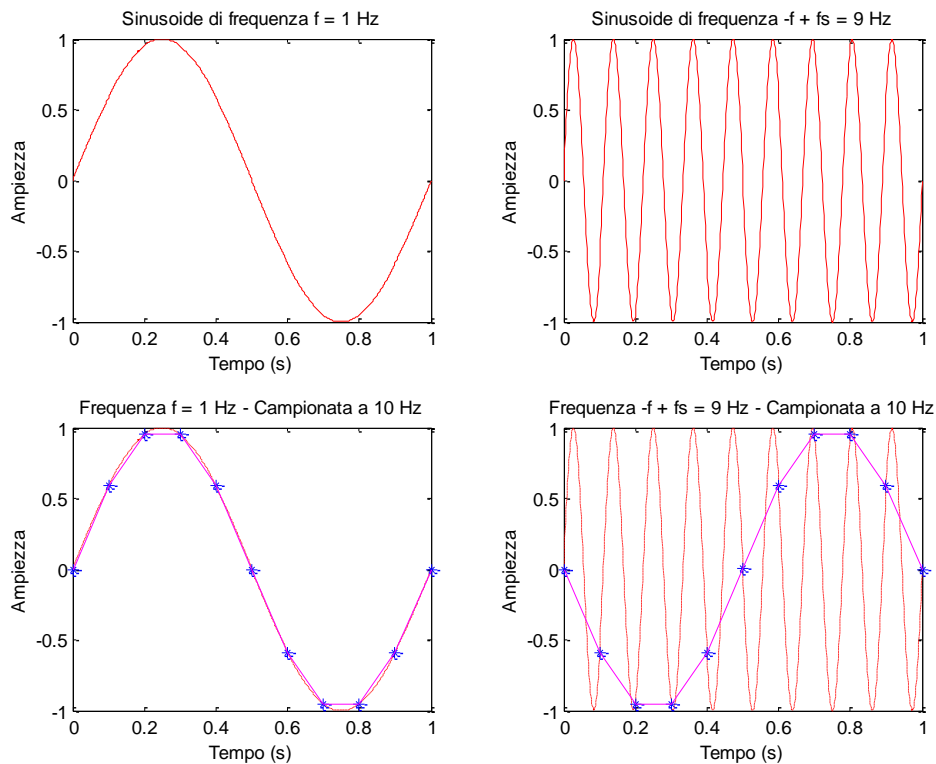
Generalizzando il ragionamento, si consideri un segnale,  $w(t)$ , di ampiezza  $A$ , fase iniziale  $\varphi$  e frequenza  $l \cdot f_s - f_0$ :

$$w(t) = A \sin[2\pi \cdot (-f_0 + l \cdot f_s) \cdot t + \varphi] \quad (4.9)$$

Campionandolo con un intervallo di campionamento  $\Delta t$  si ottiene:

$$\begin{aligned} w_n = w(n\Delta t) &= A \sin[2\pi \cdot (-f_0 + l \cdot f_s) \cdot n\Delta t + \varphi] = \\ &= A \sin[-2\pi \cdot f_0 \cdot n\Delta t + 2\pi \cdot l \cdot f_s \cdot n\Delta t + \varphi] = \\ &= A \sin[-2\pi \cdot f_0 \cdot n\Delta t + \varphi] = \\ &= -A \sin[2\pi \cdot f_0 \cdot n\Delta t + \varphi] = -x_n \end{aligned} \quad (4.10)$$

Anche in questo caso, a parte il segno,  $w_n$  è indistinguibile da  $x_n$ .



**Figura 4.4.** Esempio di campionamento di due sinusoidi che produce una stessa sequenza di campioni. Si osservi in particolare che i valori sono uguali in valore assoluto ma di segno contrario.

#### 4.4. Analisi del campionamento nel dominio di frequenza

##### 4.4.1 Trasformata Discreta di Fourier della funzione *Comb*

Dimostriamo che la trasformata di Fourier della funzione di campionamento è una funzione di campionamento. La funzione *Comb*, definita dalla relazione

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t), \quad (4.11)$$

è una funzione periodica di periodo  $\Delta t$ . Per essa vale il Teorema di Fourier e pertanto si può esprimere in serie di Fourier

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i \frac{2\pi n}{\Delta t} t}, \quad (4.12)$$

dove il coefficiente complesso  $c_n$  vale

$$c_n = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} S(t) \cdot e^{-i \frac{2\pi n}{\Delta t} t} dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) \cdot e^{-i \frac{2\pi n}{\Delta t} t} dt =$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \delta(t) \cdot e^{-i\frac{2\pi n}{\Delta t}t} dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \delta(t) \cdot e^{-i\frac{2\pi n}{\Delta t} \cdot 0} dt = \frac{1}{\Delta t}, \quad (4.13)$$

avendo utilizzato la seguente proprietà della funzione  $\delta(t)$ :  $\delta(t) \cdot f(t) = f(0) \cdot \delta(t)$ . Risulta quindi

$$S(t) = \frac{1}{\Delta t} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi n}{\Delta t}t}. \quad (4.14)$$

Ora, trasformando secondo Fourier primo e secondo membro della relazione precedente, e ricordando che la trasformata di Fourier di un impulso traslato di  $\Delta t$  vale

$$\mathcal{F}\{\delta(t - \Delta t)\} = e^{-i\omega\Delta t}, \quad (4.15)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{S(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi n}{\Delta t}t} \right] \cdot e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi n}{\Delta t}t} \cdot e^{-i\omega t} \cdot dt = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - n \cdot \frac{2\pi}{\Delta t}\right) = \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n \cdot \omega_s), \quad (4.16)$$

la quale è una funzione di campionamento (funzione Comb) nel dominio della frequenza. Il periodo di tale funzione è  $\omega_s = 2\pi f_s = 2\pi / \Delta t$ .

#### 4.4.2 Spettro periodico

Il processo di campionamento nel dominio del tempo (dominio della frequenza) produce una periodicità nel dominio della frequenza (nel dominio del tempo). Per dimostrare ciò, si consideri nuovamente l'equazione di campionamento ideale

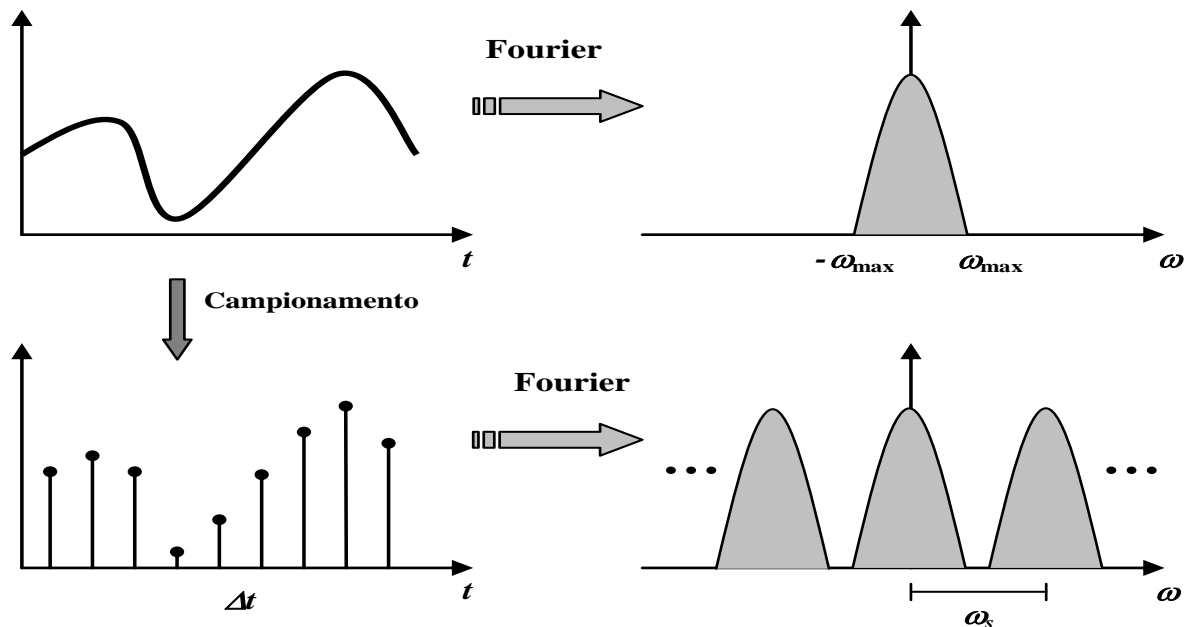
$$x_n = x(t) \cdot S(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t). \quad (4.17)$$

Trasformando secondo Fourier si ottiene lo spettro del segnale campionato  $x_n$ :

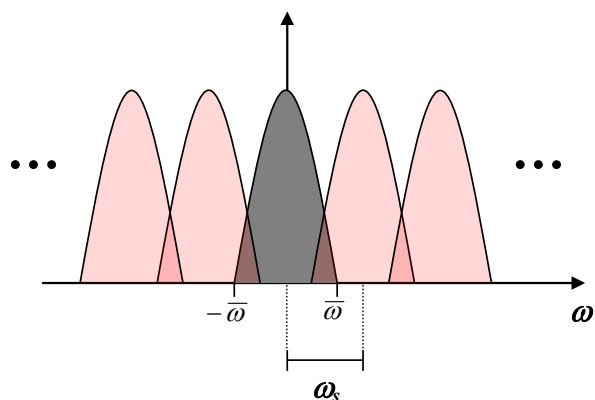
$$\mathcal{F}\{x_n\} = X(\omega) * \mathcal{F}\{S(t)\} = X(\omega) * \left[ \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \right], \quad (4.18)$$

dove  $X(\omega)$  è la trasformata di Fourier del segnale analogico  $x(t)$  e il simbolo  $*$  rappresenta il prodotto di convoluzione. Ricordando che la convoluzione di una funzione con l'impulso  $\delta(t)$  è uguale alla funzione stessa, e poiché la funzione di campionamento è una sequenza

periodica di impulsi, convolvere una funzione con la funzione di campionamento significa replicare periodicamente la funzione stessa con un periodo pari a quello della funzione di campionamento. Conseguentemente, dall'equazione (4.18) si può affermare che la trasformata di Fourier della funzione campionata  $x_n$  è una ripetizione periodica della trasformata di Fourier della funzione analogica  $x(t)$ , con periodo uguale a  $2\pi / \Delta t$  (inverso dell'intervallo di campionamento utilizzato per campionare il segnale analogico), e scalata di un fattore pari a  $1/\Delta t$ . La Figura 4.5 mostra graficamente quanto detto. Se il periodo della funzione di campionamento nel dominio della frequenza è sufficientemente grande, come mostrato in Figura 4.5, i vari periodi dello spettro non si sovrappongono. In questo caso lo spettro della funzione analogica originaria può essere separato ed estratto. Non si ha quindi nessuna perdita di informazione. D'altra parte, se il periodo della funzione di campionamento è troppo piccolo, i diversi periodi dello spettro si sovrappongono (Figura 4.6). In questo caso, lo spettro della funzione originaria non può essere separato e viene estratto uno spettro distorto con conseguente perdita di informazione. Tale effetto prende il nome di *aliasing*. Esso si verifica tutte le volte che la frequenza di campionamento è più piccola della massima frequenza del segnale analogico da campionare. Quando è presente l'aliasing, non è possibile ricostruire correttamente il segnale originario dai campioni del segnale campionato.



**Figura 4.5.** Effetto del campionamento. Campionare un segnale analogico nel dominio del tempo significa renderne periodico lo spettro. Se la frequenza di campionamento è sufficientemente grande, i diversi periodi dello spettro sono ben separati.



**Figura 4.6.** Effetto del campionamento. Quando la frequenza di campionamento non è sufficientemente grande, i diversi periodi dello spettro si sovrappongono dando luogo al fenomeno dell'aliasing.

## 4.5. Teorema del Campionamento

Il teorema del campionamento stabilisce le condizioni per cui è possibile ricostruire un segnale a partire da un campionamento discreto di suoi campioni. Esso è alla base dei moderni strumenti elettronici digitali, che usano in modo esteso il campionamento dei segnali. Storicamente, il teorema fu formulato prima da Harry T. Nyquist, ricercatore presso i Bell Labs (New Jersey, USA), e poi dimostrato da Claude E. Shannon, Ingegnere elettronico presso i Bell Labs. Per questo motivo, il Teorema del Campionamento prende anche i nomi di Teorema di Nyquist, Teorema di Shannon, o Teorema di Nyquist-Shannon.

### 4.5.1. Teorema del campionamento di Nyquist

Il teorema del campionamento fornisce la condizione necessaria affinché non si verifichi il fenomeno dell'aliasing. Secondo la formulazione di Nyquist, esso recita: *la frequenza di campionamento deve essere almeno doppia della massima frequenza contenuta nel segnale analogico*. In termini matematici

$$\omega_s \geq 2\omega_{\max} \quad (4.19)$$

dove  $\omega_s$  è la frequenza di campionamento e  $\omega_{\max}$  è la massima frequenza contenuta nel segnale analogico. Nella pratica, la frequenza massima del segnale viene imposta mediante l'utilizzo di un filtro analogico passa-basso (filtro anti-alias) che agisce all'ingresso del campionatore: la massima frequenza del segnale diventa pari alla frequenza di taglio del filtro passa-basso.

### 4.5.2. Teorema del campionamento di Shannon

Il teorema del campionamento di Shannon è una generalizzazione del teorema formulato da Nyquist. Esso afferma che, dato un segnale analogico  $x(t)$  la cui banda spettrale sia

limitata dalla frequenza  $\bar{\omega}$  (cioè, che il suo spettro  $X(\omega) = 0$  per  $|\omega| > \bar{\omega}$ ), il segnale  $x(t)$  può essere univocamente ricostruito a partire dai suoi campioni  $x(n\Delta t)$ , presi a frequenza  $\omega_s = 2\pi/\Delta t$ , se

$$\omega_s \geq 2 \cdot \bar{\omega} \quad (4.20)$$

mediante la seguente formula di interpolazione

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t) \cdot \text{sinc} \left[ \omega_N (t - n\Delta t) \right], \quad (4.21)$$

dove la funzione  $\text{sinc}(\cdot)$  è la funzione seno cardinale e la frequenza  $\omega_N = \omega_s/2$  è la cosiddetta frequenza di Nyquist.

Per dimostrare il Teorema di Shannon si consideri una funzione rettangolare nel dominio della frequenza (filtro passa-basso ideale) definita da

$$\begin{cases} H(\omega) = \frac{\pi}{\omega} & \omega \in \left[ -\frac{\omega_s}{2}; \frac{\omega_s}{2} \right] \\ H(\omega) = 0 & \omega \notin \left[ -\frac{\omega_s}{2}; \frac{\omega_s}{2} \right] \end{cases} \quad (4.22)$$

in cui sia  $\omega_s = 2\bar{\omega}$ . Sia inoltre  $X_s(\omega)$  lo spettro periodico del segnale campionato  $x_n$ . Moltiplicando  $X_s(\omega)$  per la funzione rettangolare  $H(\omega)$  si ottiene il periodo fondamentale dello spettro  $X_s(\omega)$ , cioè lo spettro  $X(\omega)$  del segnale analogico  $x(t)$ . Infatti, risulta

$$X_s(\omega) \cdot H(\omega) = \left\{ X(\omega) * \left[ \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \right] \right\} \cdot H(\omega) = X(\omega) \quad (4.23)$$

o, nel dominio del tempo,

$$x_n * h(t) = \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t) \cdot \delta(t - n\Delta t) \right] * \text{sinc} \left( \frac{\omega_s}{2} t \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t) \cdot \text{sinc} \left[ \frac{\omega_s}{2} (t - n\Delta t) \right] = x(t) \quad (4.24)$$

L'equazione (4.21) è detta formula di *interpolazione ideale*. L'aggettivo *ideale* tiene conto del fatto che le funzioni interpolatrici  $\text{sinc}(\cdot)$ , che si dovrebbero sovrapporre per ricostruire il segnale desiderato, sono infinitamente estese nel tempo in ambedue le direzioni; in altre parole, il filtraggio di ricostruzione ideale non è fisicamente realizzabile. Nella applicazione pratica del Teorema del Campionamento occorre tener conto di alcune limitazioni relative all'estensione spettrale dei segnali e alla realizzabilità dei circuiti di campionamento e ricostruzione. Rispetto al campionamento ideale, bisogna tener conto che:

- il segnale campionato consiste di impulsi di ampiezza e durata finita;

- il filtro di ricostruzione non è ideale;
- il segnale da campionare non è a banda rigorosamente limitata.



# CAPITOLO 5.

## Trasformata Discreta di Fourier

### 5.1. Trasformata discreta di Fourier

In accordo con il Teorema di Fourier, una funzione periodica  $f(t)$ , con periodo  $T_0$ , può essere espressa in termini di serie di Fourier. Quindi, con riferimento alla forma complessa della serie di Fourier

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i \frac{2\pi k}{T_0} t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ik\omega_0 t}, \quad (5.1)$$

in cui  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  e

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) \cdot e^{-ik\omega_0 t} dt \quad (5.2)$$

sono i coefficienti complessi della serie di Fourier.

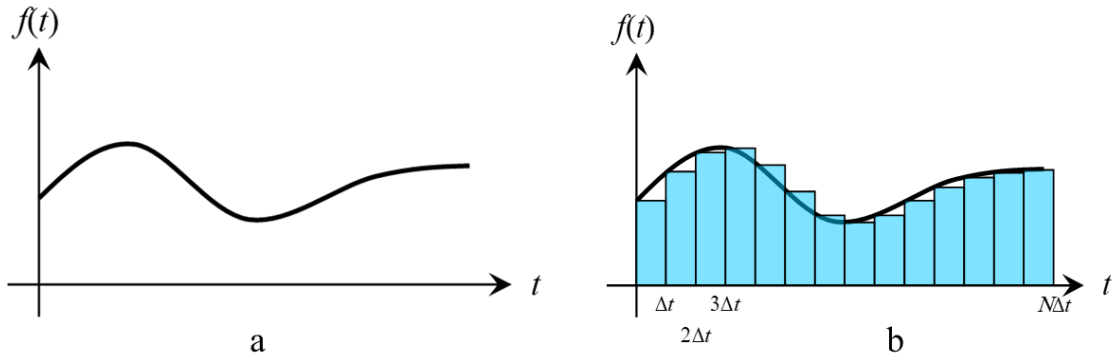
Si supponga ora che la funzione  $f(t)$ , non necessariamente periodica, sia nota esclusivamente in un intervallo  $[0 ; T_0]$ . Si può sempre supporre che questo intervallo costituisca un periodo di una funzione effettivamente periodica. Si supponga, inoltre, che la funzione sia nota non perché se ne conosce una sua espressione analitica ma perché sono noti  $N$  campioni, ottenuti dal campionamento del suo grafico con un intervallo di campionamento  $\Delta t = T_0 / N$ :

$$f(n\Delta t) = f_n = f_0, f_1, f_2, \dots, f_{N-1} \quad (5.3)$$

Allora, i coefficienti complessi  $c_k$  della (5.2) possono essere calcolati approssimativamente modificando l'espressione (5.2) come

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cdot e^{-ik\omega_0 t} dt \cong \frac{1}{T_0} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cdot e^{-i \frac{2\pi nk}{T_0} \Delta t} \cdot \Delta t, \quad (5.4)$$

in cui  $n$  è un intero che definisce la variabile discreta  $n\Delta t$ . Approssimare l'integrale con la sommatoria significa approssimare l'area sottesa dalla curva  $f(t)$  con la somma delle aree di  $N$  rettangoli come mostrato in Figura 5.1.



**Figura 5.1.** (a) Grafico della funzione  $f(t)$  nell'intervallo  $[0 ; T_0]$ ; (b) Approssimazione dell'area sottesa dalla curva con la somma delle aree di  $N$  rettangoli.

Sostituendo nella (5.4)  $T_0 = N \cdot \Delta t$  si ottiene

$$c_k \cong \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cdot e^{-i \frac{2\pi nk}{N}}. \quad (5.5)$$

Pertanto, chiamando con  $F_k$  i coefficienti approssimati  $a_k$ , si ha l'espressione formale della trasformata di Fourier discreta (DFT):

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cdot e^{-i \frac{2\pi nk}{N}}. \quad (5.6)$$

L'espressione (5.6) è lo strumento pratico per il calcolo numerico dei coefficienti complessi di Fourier. Si ha anche

$$f_n = \sum_{k=0}^{N-1} F_k \cdot e^{i \frac{2\pi nk}{N}}, \quad (5.7)$$

che è l'espressione formale della trasformata inversa di Fourier discreta (IDFT).

Valgono le seguenti osservazioni.

1 - La DFT (5.6) è stata ottenuta discretizzando la relazione (5.2), approssimando l'integrale con una sommatoria. Ciò significa che la DFT è una approssimazione tanto più fedele quanto più il numero dei campioni  $N$  è grande, o quanto più piccolo è l'intervallo di campionamento  $\Delta t$ .

2 - La trasformata inversa IDFT (5.7) permette di riottenere esattamente i campioni  $f_n$ .

### 5.1.1 – Differenti espressioni della DFT e della IDFT

La DFT e la IDFT hanno espressioni molto simili; esse differiscono per il segno dell'esponentiale complesso e per il fattore  $1/N$ . Nelle espressioni ricavate precedentemente, il fattore  $1/N$  compare nell'espressione (5.6) della DFT, così che  $f_n$  è

approssimata da una somma pesata di esponenziali complessi in cui gli  $F_k$  sono i pesi. Altre derivazioni portano a differenti espressioni. In MATLAB, per esempio, le DFT e IDFT (implementate come *fft* e *ifft*, e dette rispettivamente Fast Fourier Transform e Inverse Fast Fourier Transform) hanno le seguenti espressioni

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cdot e^{-i \frac{2\pi nk}{N}} \quad (5.8)$$

e

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k \cdot e^{i \frac{2\pi nk}{N}}, \quad (5.9)$$

dove il fattore  $1/N$  compare nella IDFT. Ciò significa che, data una sequenza  $f_n$ , i coefficienti complessi appropriati (così come definiti dalla (5.6)) devono essere calcolati dividendo il valore della *fft* per  $N$ :  $F_k = \text{fft}(f_n)/N$ .

### 5.1.2 – Frequenza digitale

Gli  $N$  valori spettrali forniti dalla DFT corrispondono alle frequenze, espresse in Hz,

$$kf_0 = \frac{k}{T_0} = \frac{k}{N\Delta t} = \frac{kf_s}{N} \quad (5.9)$$

e quindi alle frequenze digitali (normalizzate rispetto alla frequenza di campionamento  $f_s$ )

$$\frac{kf_s}{N} = \frac{k}{N} = \hat{f} \quad (5.10)$$

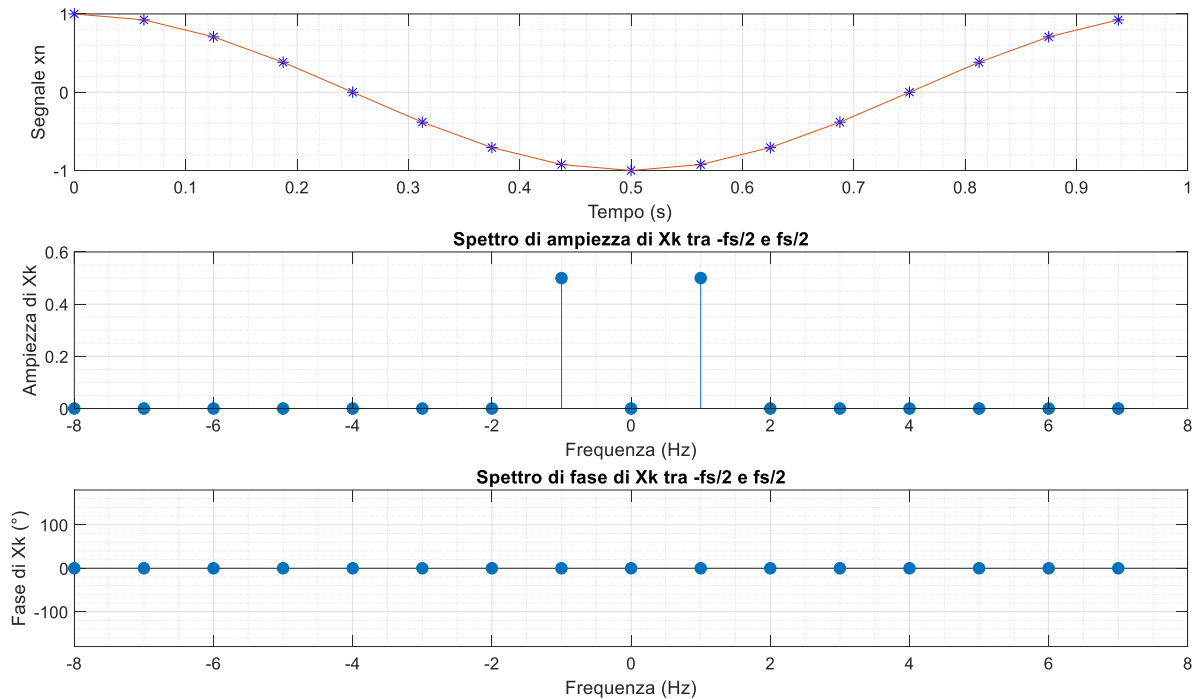
Per esempio, per una trasformata costituita da  $N = 8$  campioni si ha:

$$\begin{aligned} k &\rightarrow 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\ f &\rightarrow 0, \frac{1}{8}f_s, \frac{2}{8}f_s, \frac{3}{8}f_s, \frac{4}{8}f_s, \frac{5}{8}f_s, \frac{6}{8}f_s, \frac{7}{8}f_s \\ \hat{f} &\rightarrow 0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8} \end{aligned}$$

### 5.1.3 – Esempi

#### *Segnale cosinusoidale*

Si consideri il caso di una cosinusoide di ampiezza unitaria e frequenza di 1 Hz. Si supponga di campionare un periodo  $T = 1$  s con  $N = 16$  campioni. Come mostrato in Figura 5.2, la DFT della cosinusoide ha un valore di 0.5 per  $k = 1$  e  $k = -1$ . Tutti gli altri valori sono nulli.



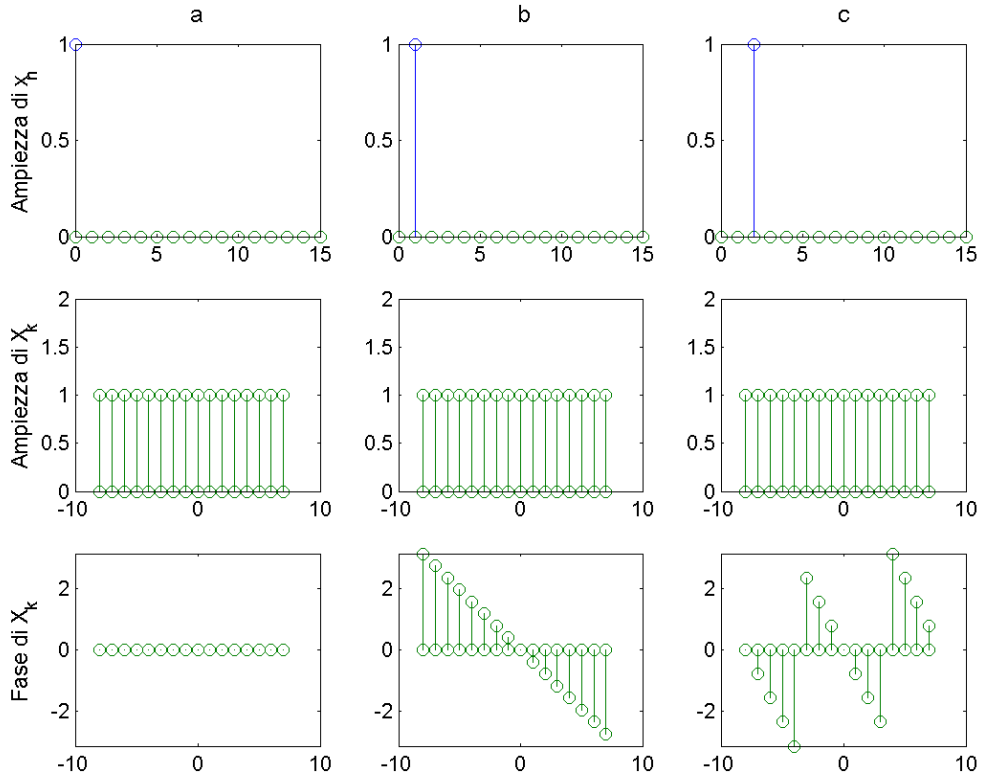
**Figura 5.2.** a) Cosinusoide con frequenza di 1 Hz; b) Modulo della DFT; c) Fase della DFT.

### *Impulso.*

Consideriamo ora un impulso di ampiezza 1 costituito da  $N = 16$  campioni. La sua DFT ha ampiezza unitaria per tutte le frequenze, mentre la fase dipende dalla posizione temporale dell'impulso. Con riferimento alla Figura 5.3, si hanno i seguenti casi:

- Quando l'impulso è posizionato a  $n = 0$ , la fase della DFT è sempre nulla;
- Quando è posizionato a  $n = 1$ , la fase varia linearmente da  $0$  a  $-2\pi$  per gli indici  $k$  che variano tra  $0$  e  $15$ . Quando la fase arriva a  $-\pi$  essa viene ribaltata aggiungendo  $2\pi$ , così che essa resta sempre compresa tra  $-\pi$  e  $\pi$ .
- Infine, per il caso dell'impulso in corrispondenza di  $n = 2$ , la fase varia linearmente da  $0$  a  $-4\pi$  per gli indici  $k$  che variano tra  $0$  e  $15$ . Quando la fase arriva a  $-\pi$  essa viene ribaltata aggiungendo  $2\pi$ , così che essa resta sempre compresa tra  $-\pi$  e  $\pi$ .

Si osservi che il grafico della DFT (sia ampiezza che fase) è stato fatto ribaltando i campioni oltre la frequenza di Nyquist nel semiasse negativo delle frequenze.



**Figura 5.3.** Spettro di un impulso. Dall'alto verso il basso sono rappresentati l'impulso, lo spettro di ampiezza e lo spettro di fase. Da sinistra verso destra sono rappresentati i casi relativi all'impulso nell'origine, l'impulso traslato di un campione e l'impulso traslato di 2 campioni.

## 5.2. Proprietà della DFT

### 5.2.1. Periodicità della DFT

Come la sequenza di input, anche la DFT è, per definizione, una sequenza periodica con periodo pari a  $N$ :  $F_k = F_{k+N}$ . Infatti, risulta

$$\begin{aligned}
 F_{k+N} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i\frac{2\pi n}{N}(k+N)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i\frac{2\pi nk}{N}} \cdot e^{-i\frac{2\pi n}{N}N} = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i\frac{2\pi nk}{N}} \cdot e^{-i2\pi n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i\frac{2\pi nk}{N}} = F_k.
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Ciò significa che i coefficienti sono solo  $N$ . Qualunque programma di calcolo restituirà  $N$  coefficienti  $F_k$ , con  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ .

### 5.2.2 – Simmetria della DFT

Si consideri una sequenza di numeri reali  $f_n$  di lunghezza  $N$  (cioè costituita da  $N$  campioni). Si dimostra che tra i coefficienti della sua trasformata discreta esiste la seguente relazione di simmetria:

$$\bar{F}_k = F_{N-k}, \quad (5.12)$$

in cui con  $\bar{F}_k$  è stato indicato il complesso coniugato di  $F_k$ . Infatti, prendendo il complesso coniugato della (5.6) e tenendo conto che  $F_{-k} = F_{N-k}$  per la periodicità della DFT, si ha

$$\begin{aligned} \bar{F}_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cdot e^{-i \frac{2\pi nk}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cdot e^{-i \frac{2\pi n(-k)}{N}} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cdot e^{-i \frac{2\pi n(N-k)}{N}} = F_{N-k}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Da questa proprietà deriva che i coefficienti della DFT possono essere valutati considerando solamente i primi  $N/2 + 1$  campioni. Per tale motivo, molti programmi di elaborazione dati disegnano gli spettri su un campo di frequenze compreso tra 0 e  $N/2$  (la frequenza di Nyquist). Inoltre, si possono fare le seguenti osservazioni. Tenendo conto delle due proprietà suddette (periodicità e simmetria) si ha

$$\bar{F}_0 = F_0. \quad (5.14)$$

Pertanto, il coefficiente relativo alla frequenza 0 (la cosiddetta continua) è un numero reale, e poiché

$$\bar{F}_0 = F_N, \quad (5.15)$$

anche il campione  $N$  è reale. Infine, potendosi mostrare che

$$\bar{F}_{N/2} = F_{N/2}, \quad (5.16)$$

anche il campione  $N/2$  (corrispondente alla frequenza di Nyquist) è reale.

### 5.2.3 – Traslazione temporale di una sequenza

Se una sequenza di campioni sequenza  $f_n$  viene traslata di  $m$  campioni, la fase della DFT subisce una variazione. Si consideri nuovamente l'espressione (5.6)

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cdot e^{-i \frac{2\pi nk}{N}}. \quad (5.17)$$

Per la sequenza traslata  $f_{n+m}$  si può scrivere

$$F'_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_{n+m} \cdot e^{-i \frac{2\pi nk}{N}}. \quad (5.18)$$

Ora, ponendo  $r = n + m$  si ha

$$F'_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_r \cdot e^{-i \frac{2\pi kr}{N}} \cdot e^{i \frac{2\pi km}{N}}, \quad (5.19)$$

da cui, separando le sommatorie da  $m$  a  $N-1$  e da  $N$  a  $N-1+m$ , e ricordando che  $f_{N+r} = f_r$

$$F'_k = e^{i\frac{2\pi km}{N}} \cdot F_k. \quad (5.20)$$

Pertanto, se  $F_k$  è la DFT di  $f_n$ , allora la (5.20) è la DFT di  $f_{n+m}$ .

Si passi ora agli spettri di ampiezza e fase. Poiché per definizione si ha

$$F_k = |F_k| \cdot e^{i2\pi\phi_k} \quad (5.21)$$

e

$$F'_k = |F_k| \cdot e^{i2\pi\left(\frac{km}{N} + \phi_k\right)}. \quad (5.22)$$

si può concludere che la traslazione temporale di  $m$  campioni può essere eseguita nel dominio della frequenza sommando allo spettro di fase di  $f_n$  una rampa lineare  $km/N$ . Un esempio è riportato nella Figura 5.3.

### 5.3. Problemi associati alla DFT

Quando si esegue l'analisi di Fourier mediante la DFT (o FFT) occorre tenere presente alcune limitazioni che possono indurre ad interpretazioni errate. Tali limitazioni sono essenzialmente la limitata risoluzione tra le frequenze vicine e la scarsa capacità di individuare segnali di piccola ampiezza in presenza di altri segnali caratterizzati da grandi ampiezze. Esistono due problemi fondamentali: il segnale sperimentale può essere osservato per un tempo limitato; la DFT calcola i coefficienti in corrispondenza di alcuni valori discreti della frequenza. Il limite imposto dal tempo di osservazione è caratteristico di un qualunque metodo di analisi spettrale, mentre il campionamento in frequenza è peculiare dei metodi numerici quali appunto la DFT.

#### 5.3.1. Tempo di osservazione limitato

Il primo problema sorge poiché un segnale sperimentale può essere misurato solamente per un tempo limitato. Nulla si può dire su di esso al di fuori dell'intervallo di osservazione. Si possono fare solo delle ipotesi e la DFT assume esplicitamente che il segnale sia periodico: il segnale misurato durante l'intervallo di osservazione si ripete uguale a sé stesso prima e dopo l'intervallo di osservazione.

#### 5.3.2 – Risoluzione temporale e risoluzione spettrale: il Principio di Incertezza

Solitamente, i segnali sono segnali “complicati”, nel senso che sono costituiti da tanti segnali “elementari”. Analizzare un segnale significa scinderlo nelle sue componenti

elementari. In pratica, per fare l'analisi di un segnale con la DFT occorre avere un'elevata risoluzione spettrale ed un'elevata risoluzione temporale.

La DFT accetta in ingresso una finestra di  $N$  campioni, equispaziati nel tempo, di lunghezza  $T = N\Delta t$ , e fornisce in uscita  $N$  campioni spettrali equispaziati in frequenza tra 0 Hz e la frequenza di campionamento  $f_s = 1/\Delta t$  Hz. Pertanto, la risoluzione spettrale dello spettro DFT (cioè la spaziatura lungo l'asse delle frequenze tra due campioni successivi) è data da

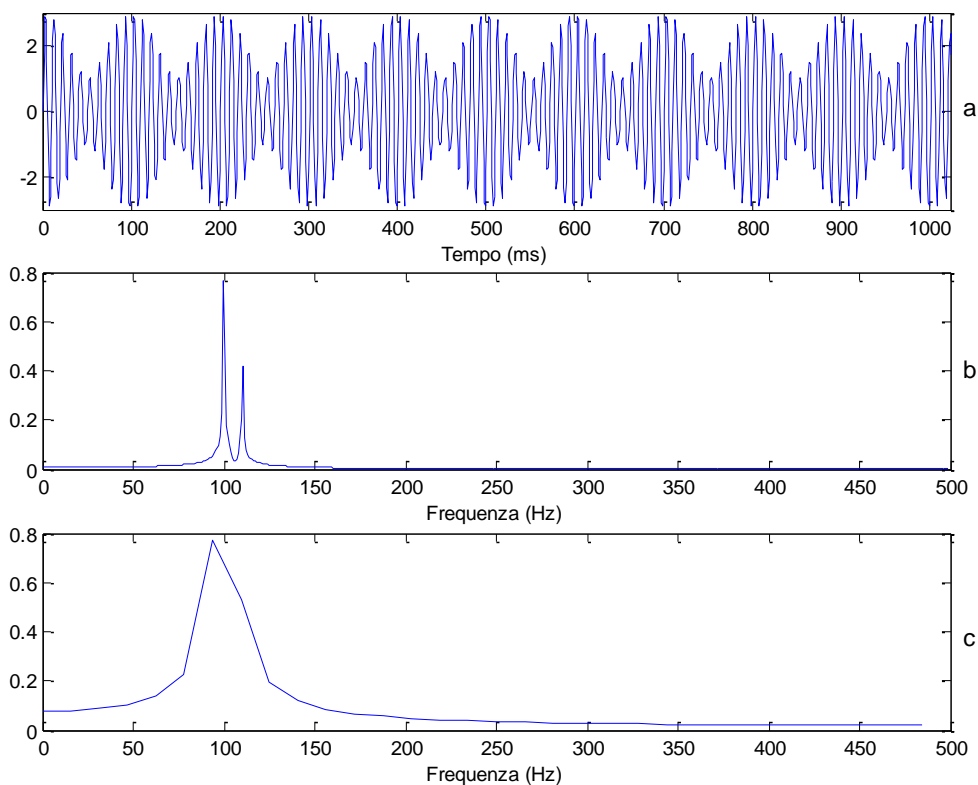
$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta t} = \frac{f_s}{N}. \quad (5.23)$$

Si noti che  $\Delta t$  (risoluzione temporale) e  $\Delta f$  (risoluzione spettrale) sono inversamente proporzionali e non possono essere aumentati contemporaneamente; cioè

$$\Delta t \cdot \Delta f = \frac{1}{N}. \quad (5.24)$$

Questo è il principio di incertezza.

Come esempio, si consideri il segnale risultante dalla combinazione di due sinusoidi di frequenza 100 Hz e 110 Hz (Figura 5.4a).



**Figura 5.4.** a) Somma delle sinusoidi a 100 e 110 Hz. b) Spettro ottenuto con  $N_1 = 1024$  campioni; c) spettro con  $N_2 = 64$  campioni.



Si supponga di campionare entrambe le sinusoidi con una frequenza di campionamento di  $f_s = 1$  kHz, e si provino due finestre temporali:

$$N_1 = 1024 \quad \text{con} \quad \Delta f = \frac{1000}{1024} = 0.98 \text{ Hz}$$

$$N_2 = 64 \quad \text{con} \quad \Delta f = \frac{1000}{64} = 15.7 \text{ Hz}.$$

Si ottiene quanto mostrato nelle Figure 5.4b e 5.4c. Quando si utilizza una finestra di 64 campioni la risoluzione spettrale è insufficiente per discriminare le frequenze di 100 e 110 Hz.

### 5.3.2.1 Tecnica dello “zero-padding”

Dall’equazione (4.24), la risoluzione spettrale è determinata dalla relazione

$$\Delta f = \frac{f_s}{N}. \quad (5.25)$$

in cui  $f_s$  è la frequenza di campionamento e  $N$  è il numero di campioni del segnale in una finestra di osservazione lunga  $T_w = N / f_s$ . Allora, a parità di frequenza di campionamento, la risoluzione spettrale può essere incrementata aumentando il numero di campioni. Ciò può essere fatto aggiungendo degli zeri in coda agli  $N$  campioni del segnale. Tale tecnica prende il nome di “zero-padding”.

Siano  $x_n$  e  $x_{n+z}$  rispettivamente la sequenza di  $N$  campioni e la sequenza di  $L = N + Z$  campioni ottenuta dalla precedente aggiungendo  $Z$  zeri. Le DFT delle due sequenze sono

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-i \frac{2\pi nk}{N}} \quad (5.26)$$

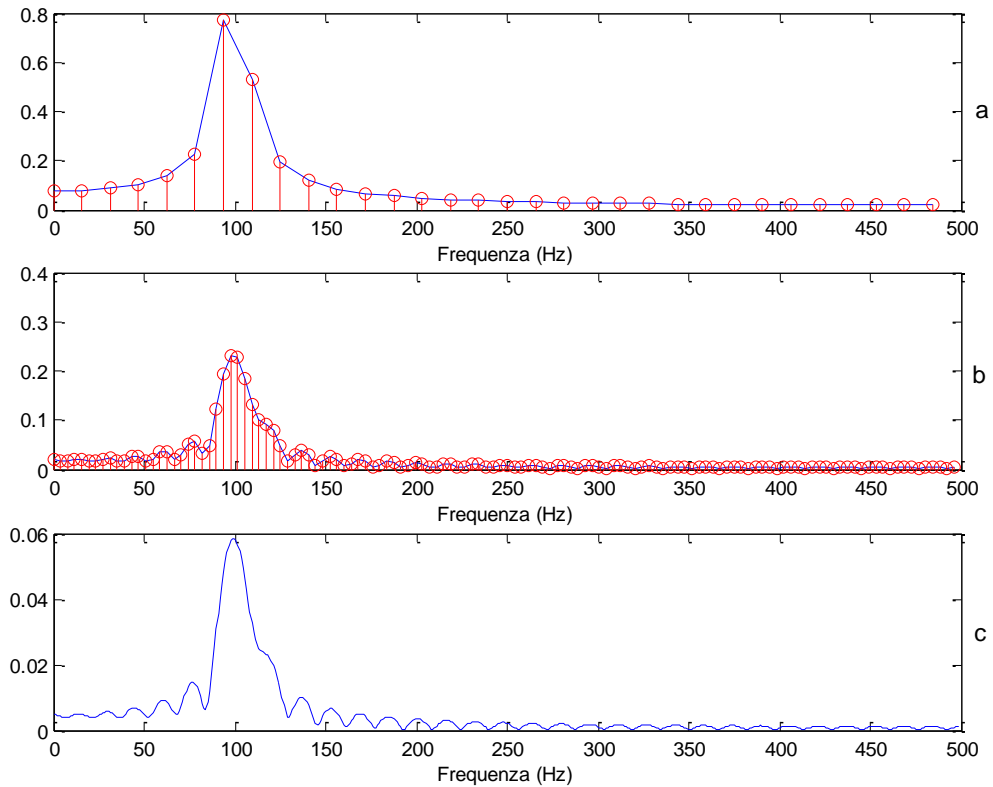
e

$$\hat{X}_k = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x_{n+z} \cdot e^{-i \frac{2\pi nk}{L}} = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{N-1} x_{n+z} \cdot e^{-i \frac{2\pi nk}{L}} \quad (5.27)$$

poiché  $x_{n+z} = 0$  per  $\forall n > N$ . Quindi, l’effetto dello zero-padding è un’interpolazione dello spettro  $X_k$ . La nuova risoluzione spettrale sarà ovviamente

$$\hat{\Delta f} = \frac{f_s}{L} \quad (5.28)$$

Occorre osservare che tale incremento di risoluzione influisce solamente sul grafico dello spettro ma non migliora la risoluzione nel senso di una migliore separazione delle componenti spettrali. A tal proposito, si osservi la Figura 5.5.



**Figura 5.5.** a) Spettro con 64 campioni relativo all'esempio della Figura 5.4c) Spettro ottenuto con  $L = 256$  campioni (di cui 192 sono zeri). c) Spettro con  $L = 1024$  campioni (di cui 960 sono zeri).

La Figura 5.5a mostra lo stesso spettro della Figura 5.4c ottenuto utilizzando una finestra di osservazione di 64 campioni. Le Figure 5.5b e 5.5c mostrano invece lo stesso spettro ma calcolato utilizzando la tecnica dello zero-padding aggiungendo rispettivamente 192 e 960 zeri (cioè utilizzando rispettivamente 256 e 1024 campioni). Risulta evidente il miglioramento grafico dello spettro ma soprattutto (ed è questo l'aspetto importante in molte applicazioni pratiche) la migliore definizione delle frequenze contenute nel segnale originario (si noti il picco dello spettro nei tre differenti casi). D'altra parte, è altrettanto evidente che i 1024 campioni ottenuti con lo zero-padding (Figura 5.5c) non producono lo stesso risultato ottenuto con una finestra di osservazione di 1024 campioni (Figura 5.4b).

### 5.3.2.2. "Leakage" spettrale

Il "leakage" spettrale è una distorsione spettrale dovuta alla dispersione dell'energia su frequenze alle quali essa era originariamente nulla. Esso è sempre presente quando si analizza un segnale reale con la DFT e può generare errori di interpretazione se non viene riconosciuto e minimizzato. Esso è legato al fatto che in pratica i segnali che vengono analizzati sono sempre di durata limitata. Il segnale da analizzare è sempre una porzione di un segnale illimitato  $x(t)$ , prelevata attraverso una opportuna finestra temporale  $w(t)$ , detta finestra di troncamento o di osservazione.

Quando si analizza un segnale campionato e troncato mediante DFT è importante che

- la scelta della finestra di troncamento sia fatta in modo tale che il segnale troncato abbia un numero intero di periodi;
- la frequenza di campionamento sia “sincronizzata” con la frequenza fondamentale del segnale da analizzare.

Per comprendere tali aspetti, si consideri, come esempio, un segnale sinusoidale di frequenza  $f_0$  e si supponga che venga campionato con una frequenza  $f_s$ , che garantisca il rispetto del teorema del campionamento. Con riferimento alla Figura 5.6, si possono evidenziare le seguenti relazioni:

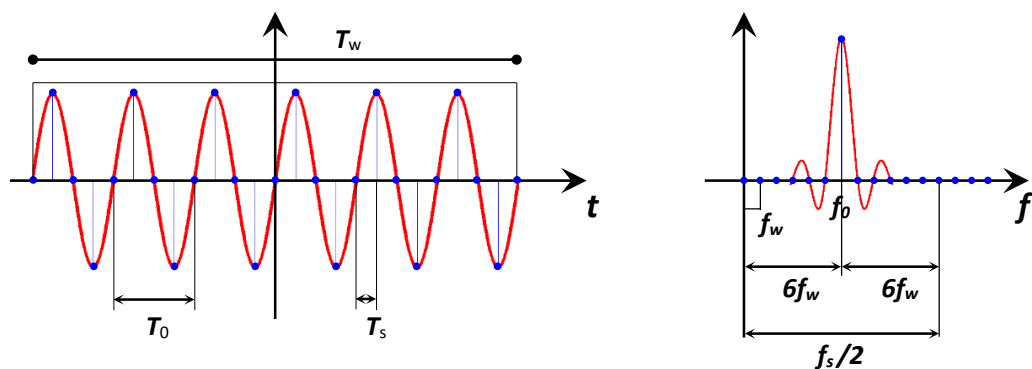
- la finestra di troncamento  $T_w$  contiene un numero  $m$  di periodi  $T_0$  del segnale da analizzare,  $T_w = mT_0$ , dove  $m$  può essere intero o frazionario;
- detto  $N$  il numero totale di campioni che cadono in tale finestra, la frequenza di campionamento risulta

$$f_s = N \cdot f_w = \frac{N \cdot f_0}{m}$$

dove  $f_w$  è l'inverso di  $T_w$ .

Per il caso particolare rappresentato nella Figura 5.6 si verifica facilmente che

- $m = 6$  è intero e pertanto  $T_w = 6T_0$ ;
- $N = 24$  e pertanto  $f_s = 24f_w = 4f_0$ .



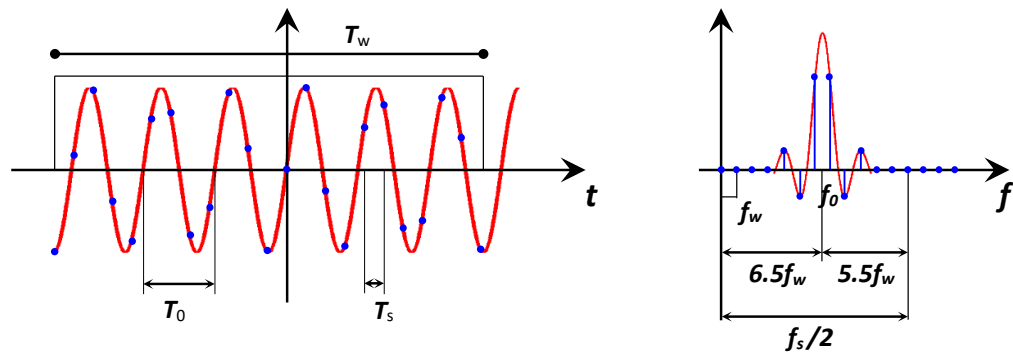
**Figura 5.6.** Spettro di una sinusoida campionata e troncata:  $T_w = 6T_0$  e  $f_s = 4f_0$ .

In tal caso, ripetere la finestra di osservazione  $T_w$  indefinitamente nel tempo significa riprodurre in forma esatta la funzione periodica. E infatti il calcolo della DFT per le diverse componenti  $kf_w$  fornisce componenti tutte nulle tranne proprio l'unica componente

armonica effettivamente presente alla frequenza  $f_0 = 6f_w$ , come rappresentato in Figura 5.6.

Si consideri ora il caso rappresentato in Figura 5.7, dove la finestra di osservazione  $T_w$  non risulta un multiplo intero  $m$  del periodo  $T_0$ , e dove  $T_w = 6.5T_0$ , oppure  $f_0 = 6.5f_w$ . Per agevolare il confronto dei due esempi, la durata di osservazione  $T_w$  è stata assunta uguale nei due casi e, pertanto, risultano anche uguali gli intervalli  $f_w$  nel dominio della frequenza. Supponendo, inoltre, che nel tempo  $T_w$  si prelevino ancora  $N = 24$  campioni, la frequenza di campionamento risulta

$$f_s = 24f_w = \frac{24}{6.5}f_0 = 3.692f_0$$



**Figura 5.7.** Spettro di una sinusoida campionata e troncata:  $T_w = 6.5T_0$  e  $f_s = 3.692f_0$ .

Quindi, con le ipotesi fatte, la frequenza di campionamento  $f_s$  è uguale a quella del caso precedente, ma è cambiato il suo rapporto con la frequenza  $f_0$  del segnale sinusoidale. In questo caso, la ripetizione nel tempo del segnale campionato e troncato non riprodurrà esattamente la funzione periodica originaria, con una conseguente distorsione nello spettro. Questo fatto trova riscontro nella DFT che evidenzierà, in tal caso, componenti armoniche non presenti nello spettro del segnale periodico originario, come si vede in Figura 5.7.

Dagli esempi riportati precedentemente, risulta importante che per una corretta analisi armonica di segnali periodici mediante DFT, riveste particolare importanza la scelta della finestra di troncamento e il fatto che la frequenza di campionamento sia sincronizzata con la frequenza fondamentale del segnale da analizzare. Qualora non si riesca a rendere la finestra di osservazione esattamente multipla del periodo del segnale, un modo per limitare l'inconveniente può essere quello di impiegare finestre molto ampie rispetto al periodo della fondamentale e soprattutto del tipo con transizione graduale delle estremità (*smoothing windows*).

## 5.4. Finestre di troncamento

Per minimizzare il leakage spettrale occorre scegliere delle finestre di troncamento o di osservazione diverse da quella rettangolare, finestre che non contengano brusche discontinuità agli estremi. Le finestre con un passaggio graduale (smoothed) hanno degli spettri con i lobi secondari che decrescono a zero più rapidamente dando luogo ad un minore effetto di leakage dell'energia. Esistono numerose finestre con queste caratteristiche. Tra quelle più utilizzate, ci sono le finestre cosinusoidali tipo Hanning, Hamming e Blackman, definite dalle seguenti equazioni:

*Hanning*

$$w_{Hann} = 0.5 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N} \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (5.29)$$

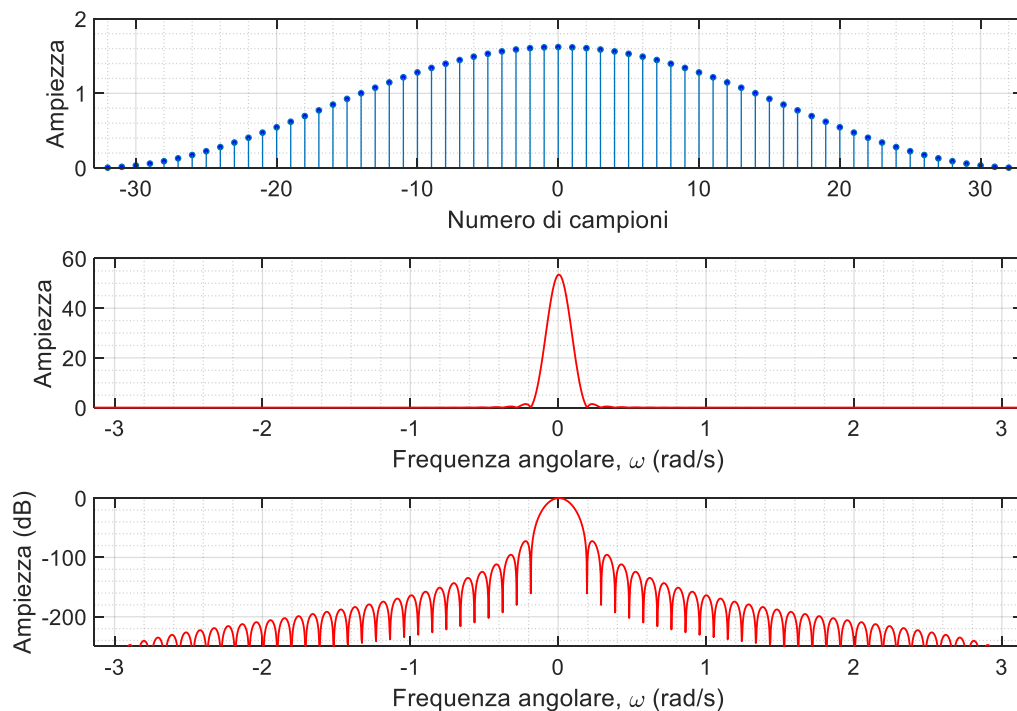
*Hamming*

$$w_{Ham} = 0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{N} \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (5.30)$$

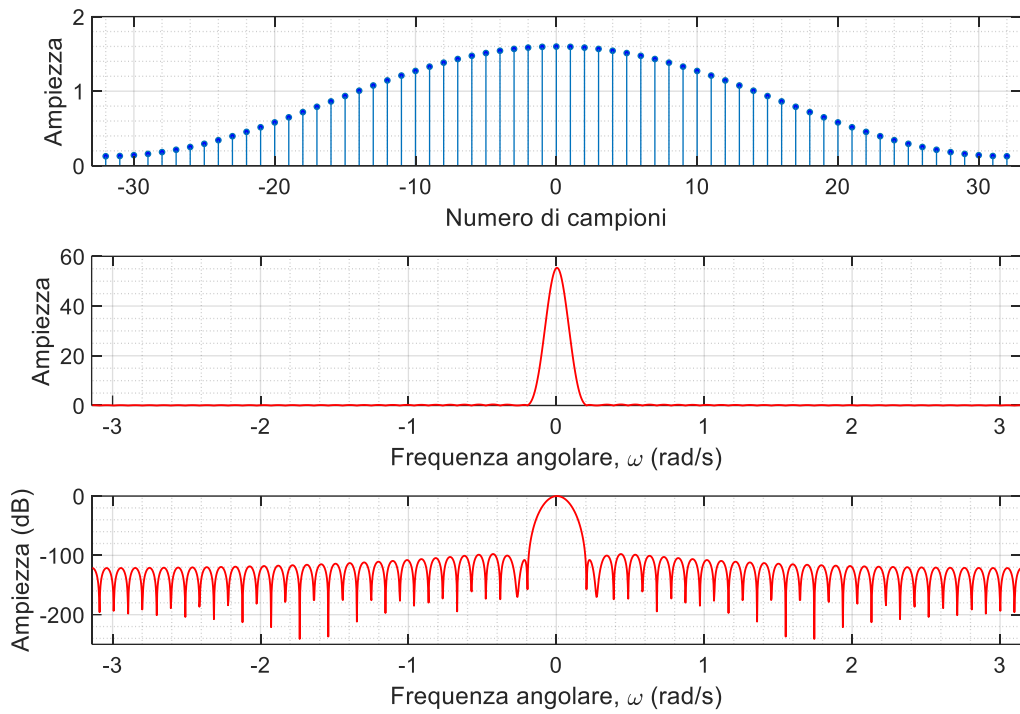
*Blackmann*

$$w_{Black} = 0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{N} \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (5.31)$$

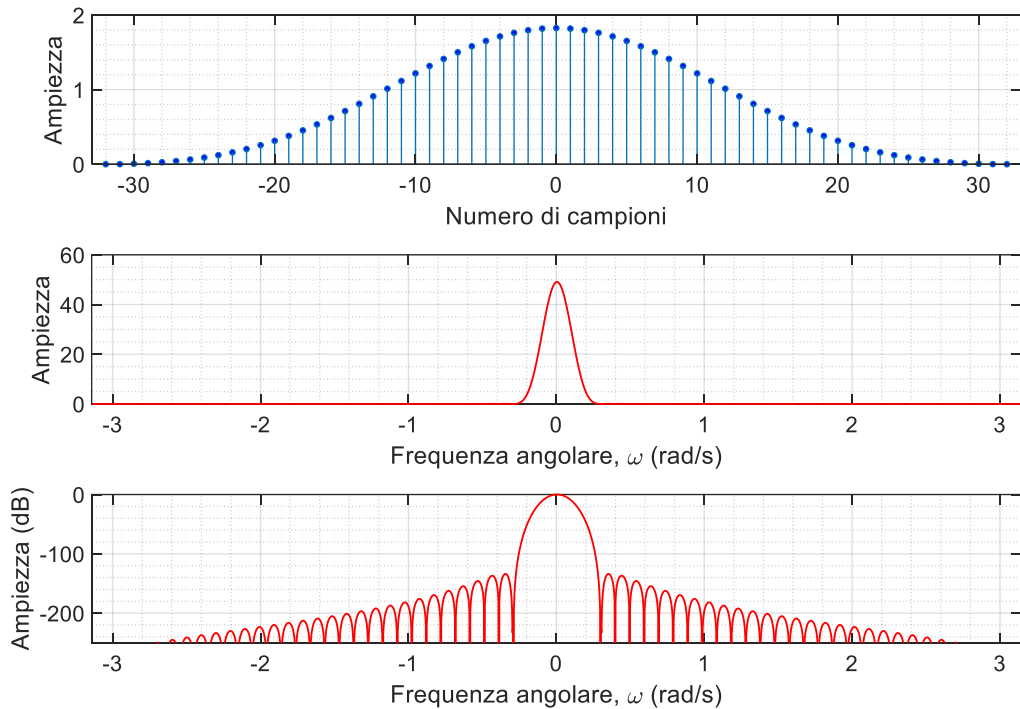
Le Figure 5.8, 5.9 e 5.10 mostrano le finestre e gli spettri di ampiezza.



**Figura 5.8.** Finestra tipo Hanning (64 campioni) e spettri, con ampiezza spettrale lineare (centro) e in decibel (basso).



**Figura 5.9.** Finestra tipo Hamming (64 campioni) e spettri, con ampiezza spettrale lineare (centro) e in decibel (basso).



**Figura 5.10.** Finestra tipo Blackmann (64 campioni) e spettri, con ampiezza spettrale lineare (centro) e in decibel (basso).

Un aspetto importante da considerare è che il tipo di finestra dovrebbe essere scelto, oltre che in funzione della minimizzazione dei lobi secondari, anche in funzione della

larghezza del lobo principale, poiché tale larghezza influisce sulla capacità di individuare due linee spettrali vicine. Le precedenti esigenze non possono essere ottenute contemporaneamente e, pertanto, le finestre dovranno essere scelte trovando un compromesso tra le due condizioni desiderate.

# CAPITOLO 6.

## Cenni di teoria musicale

### 6.1. Introduzione

Per poter applicare al meglio l'Analisi di Fourier ai segnali musicali polifonici, occorre innanzitutto distinguere la musica in monofonia e polifonia. Nella monofonia, le note vengono suonate una alla volta, e mai sovrapposte nel tempo. Dal punto di vista dell'analisi spettrale, questo rende l'analisi in frequenza e anche il riconoscimento delle altezze delle note più semplici. Diversamente, nella musica polifonica vengono suonate simultaneamente più note a diverse altezze (frequenze). In particolare, si parla di accordi quando si ha la simultaneità di tre o più note a diverse altezze (frequenze). In questa tesi prenderò in considerazione solo gli accordi costituiti da tre note e detti, appunto triadi maggiori (punto 6.2). Inoltre, per facilitare la lettura del Capitolo 7, presenterò qui, al punto 6.3, i principali metodi di rappresentazione simbolica della musica.

### 6.2. Triadi

Una triade è costituita da una nota fondamentale, da cui prende il nome l'accordo, un intervallo di terza (maggiore o minore), e un intervallo di quinta (diminuita o aumentata). Gli intervalli si riferiscono, nella teoria musicale occidentale, alla 'distanza' in semitoni tra due note con riferimento alla "twelve-tone equal-tempered scale". In questo modello, un'ottava (definita come la distanza tra un'altezza e un'altra con una frequenza fondamentale pari alla metà, o al doppio, della prima) è suddivisa in 12 passi equamente spaziatati in frequenza, in scala logaritmica. Solo sette di questi passi, però, ha un nome proprio (Tabella 6.1); gli altri sono ottenuti affiancando due simboli al nome:

- #, o diesis, che indica un aumento di un semitono rispetto alla nota in questione;
- b, o bemolle, che descrive un decremento di un semitono rispetto alla nota di riferimento.

Nella Tabella 6.1 troviamo il nome degli intervalli con riferimento a C4 come nota fondamentale.



**Tabella 6.1** – Nomi degli intervalli in base alla differenza in semitoni

Differenza semitoni	Nome intervallo	Intervallo Denominazione Italiana	Intervallo Denominazione inglese
0	Unisono	Do <sub>4</sub> – Do <sub>4</sub>	C <sub>4</sub> – C <sub>4</sub>
1	Seconda minore	Do <sub>4</sub> – Do <sup>b</sup> <sub>4</sub>	C <sub>4</sub> – C <sup>b</sup> <sub>4</sub>
2	Seconda maggiore	Do <sub>4</sub> – Re <sub>4</sub>	C <sub>4</sub> – D <sub>4</sub>
3	Terza minore	Do <sub>4</sub> – Mi <sup>b</sup> <sub>4</sub>	C <sub>4</sub> – E <sup>b</sup> <sub>4</sub>
4	Terza maggiore	Do <sub>4</sub> – Mi <sub>4</sub>	C <sub>4</sub> – E <sub>4</sub>
5	Quarta (giusta)	Do <sub>4</sub> – Fa <sub>4</sub>	C <sub>4</sub> – F <sub>4</sub>
6	Tritono	Do <sub>4</sub> – Fa <sup>#</sup> <sub>4</sub>	C <sub>4</sub> – F <sup>#</sup> <sub>4</sub>
7	Quinta (giusta)	Do <sub>4</sub> – Sol <sub>4</sub>	C <sub>4</sub> – G <sub>4</sub>
8	Sesta minore	Do <sub>4</sub> – La <sup>b</sup> <sub>4</sub>	C <sub>4</sub> – A <sup>b</sup> <sub>4</sub>
9	Sesta maggiore	Do <sub>4</sub> – La <sub>4</sub>	C <sub>4</sub> – A <sub>4</sub>
10	Settima minore	Do <sub>4</sub> – Si <sup>b</sup> <sub>4</sub>	C <sub>4</sub> – B <sup>b</sup> <sub>4</sub>
11	Settima maggiore	Do <sub>4</sub> – Si <sub>4</sub>	C <sub>4</sub> – B <sub>4</sub>
12	Ottava (giusta)	Do <sub>4</sub> – Do <sub>5</sub>	C <sub>4</sub> – C <sub>5</sub>

Per convenzione, si prende come riferimento la nota A<sub>4</sub> (La<sub>4</sub> in notazione italiana), che ha la frequenza di 440 Hz. Il numero che accompagna la lettera nella denominazione delle note si riferisce all’ottava di riferimento. La prima nota di ogni ottava è per convenzione C, mentre l’ultima è B; perciò, ad esempio, C<sub>3</sub> avrà un’altezza minore di G<sub>3</sub>.

I vari semitoni della cosiddetta scala diatonica vengono determinati attraverso la formula:

$$440 \cdot k^n \quad (6.1)$$

in cui

$$k = 2^{\frac{1}{12}} \quad (6.2)$$

ed  $n$  è un numero intero ( $n \in \mathbb{Z}$ ) che indica il numero di semitoni che ci sono tra due note.

#### *Esempio di calcolo di C<sub>4</sub>*

Per determinare la frequenza della nota C<sub>4</sub> occorre innanzitutto individuare il valore del coefficiente  $n$  della relazione (6.1). A tal fine, bisogna tener presente che tra le note A<sub>4</sub> e C<sub>4</sub> ci sono 9 semitoni e che la nota C<sub>4</sub> ha un’altezza minore di A<sub>4</sub>. Pertanto, risulta  $n = -9$ . Introducendo tale valore nella relazione (6.1) si ottiene:

$$440 \cdot k^{-9} = 261,62 \text{ Hz.} \quad (6.1)$$

Un intervallo di terza maggiore è costituito da due toni, ossia quattro semitoni, mentre uno minore è costituito da un tono e un semitono. Quindi, per esempio, l’accordo di C major (Do maggiore) è composto dalle seguenti note:

- C4 (Do4) alla frequenza 261,62 Hz;
- E4 (Mi4) alla frequenza 329,62 Hz;
- G4 (Sol4) alla frequenza 391,99 Hz.

Per l'accordo di C minor (Do minore), che differisce per un semitono in meno all'intervallo di terza, sarà composto dalle seguenti note:

- C4 (Do4) alla frequenza 261,62 Hz;
- D<sup>#</sup>4 (Re<sup>#</sup>4) alla frequenza 311,13 Hz;
- G4 (Sol4) alla frequenza 391,99 Hz.

### 6.3. Rappresentazione simbolica

Le rappresentazioni simboliche descrivono la musica attraverso entità che hanno un esplicito significato musicale, e, se espressi digitalmente, possono essere interpretate da un computer [15]. In questo paragrafo si tratteranno alcuni esempi, come la rappresentazione tramite Piano Roll e rappresentazioni MIDI.

#### 6.3.1. Piano-Roll

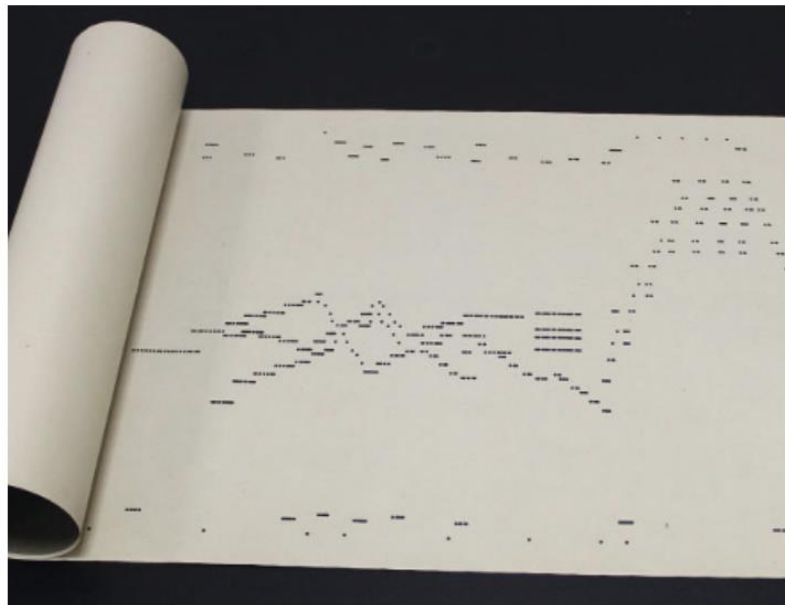
In origine, il Piano Roll indicava un rotolo di carta con dei particolari fori rappresentanti informazioni sul controllo delle note. Era usato congiuntamente al “pianoforte meccanico” (Figura 6.1.): il rotolo si muoveva sul sistema di lettura denominato ‘tracker bar’, e quando un foro veniva incrociato e letto da esso, scattava il ciclo meccanico necessario per ogni nota musicale [15] (Figura 6.2.). In generale, la rappresentazione tramite piano-roll è una visualizzazione geometrica delle informazioni musicali: troviamo sulle ascisse il tempo, mentre le ordinate codificano l'altezza musicale. Ogni nota è rappresentata da un rettangolo, parallelo alle ascisse, che codifica tre caratteristiche:

1. L'inizio della nota, in base alla coordinata estrema sinistra del rettangolo;
2. L'altezza della nota, data dalla coordinata verticale dal valore minore del rettangolo;
3. La durata della nota, codificata dalla larghezza del rettangolo.

Nonostante questa simbologia sia una semplificazione rispetto alla notazione musicale classica, la sua facilità di comprensione e di utilizzo la rende molto utile specialmente nel mondo dell'audio digitale.



**Figura 6.1.** Un esempio di piano meccanico, o ‘player piano’ [15].



**Figura 6.2.** Esempio di piano roll [15].

### 6.3.2. MIDI

L’acronimo MIDI sta per Music Instrument Digital Interface. Il MIDI non rappresenta un suono musicale direttamente, ma solo le informazioni sulla performance che codificano le istruzioni su come suonare uno strumento o produrre musica. Sostanzialmente, invece di premere fisicamente i tasti di uno strumento musicale digitale per produrre un suono, un musicista può mandare allo strumento digitale, per produrre lo stesso suono, degli adeguati messaggi MIDI che codificano il note-on della nota, la key velocity, il note-off della nota ed altre informazioni. Questi messaggi possono essere generati automaticamente da altri dispositivi musicali elettronici oppure forniti da un computer [15].

Il note-on e note-off sono messaggi a cui sono associati il MIDI note number, un valore per la key velocity, una specificazione del canale e una marca temporale. Il MIDI note number è un intero tra 0 e 127 e codifica l'altezza di una nota. A interi successivi corrisponde un aumento di semitono, perciò il MIDI note number codifica un'altezza compresa tra il C0 e il G<sup>#9</sup>. La key velocity, sempre un intero tra 0 e 127, codifica l'intensità del suono. Il canale MIDI è un intero tra 0 e 15, e informa il sintetizzatore su che strumento utilizzare che sia stato precedentemente assegnato su quel canale. Infine, la marca temporale è un valore intero che indica quanti impulsi di clock devono passare prima che il rispettivo comando di note-on o note-off venga messo in atto. A riguardo, il MIDI può esprimere informazioni temporali in termini di entità musicale piuttosto che unità assolute come, ad esempio, i microsecondi: il MIDI suddivide le 'quarter notes' (quarti di note intere, la misura di base nella rappresentazione classica musicale) in unità di tempo base chiamate impulsi di clock [15]. Il numero di impulsi per quarto di nota (PPQN) dev'essere specificato all'inizio, in quello che viene chiamato "header" di un file MIDI [15]; un valore comune è quello di 120 PPQN.

Gli strumenti che più vengono utilizzati tramite messaggi MIDI sono attualmente plugins (ossia software che simulano strumentazione hardware) e sintetizzatori digitali (Figura 6.3). Il sintetizzatore nasce come strumento musicale d'avanguardia ricavato da strumentazione scientifica, come oscillatori e filtri, che ha permesso per la prima volta di costruire il suono desiderato partendo da semplici tensioni elettriche, aprendo, negli anni '60, un nuovo orizzonte creativo completamente inesplorato [16]. Già dagli anni '80 molti synths hanno abbracciato il mondo digitale.



**Figura 6.3.** Il Nord Stage 88, uno dei sintetizzatori digitali più famosi.

# CAPITOLO 7.

## Applicazioni dell'Analisi di Fourier ai segnali audio musicali

### 7.1 Introduzione

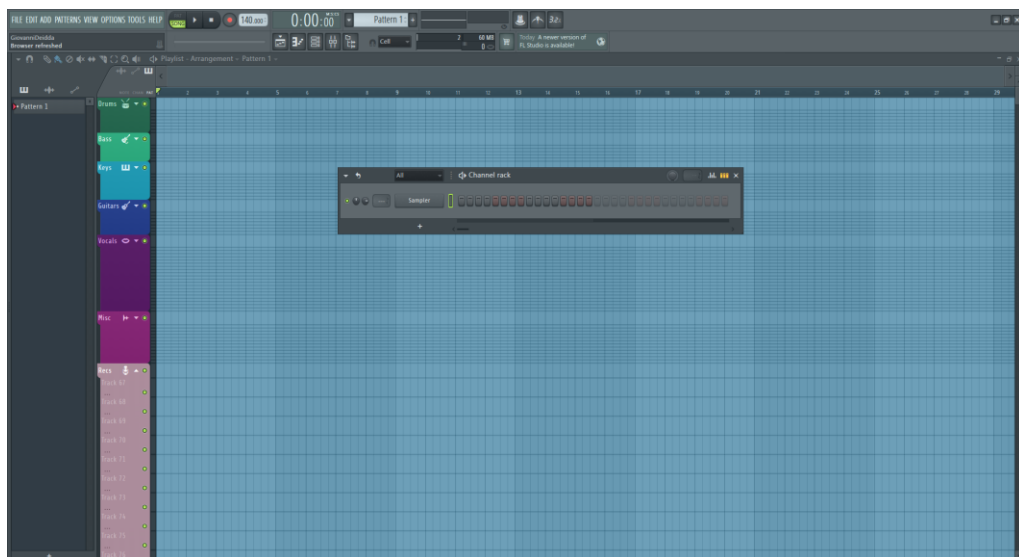
Nel paragrafo 7.2 si discuterà la catena di acquisizione dei segnali audio da trattare; a seguire, nel paragrafo 7.3 si utilizzeranno degli script di MATLAB atti a dimostrare l'utilità pratica dei coefficienti di Fourier per segnali musicali. Il paragrafo 7.4 mostrerà alcune applicazioni per problemi più avanzati come rappresentazione musicale e riconoscimento di accordi. Infine, al 7.5 si potranno vedere i listati delle function di Matlab utilizzati.

### 7.2 Acquisizione dei segnali

Sono stati utilizzati gli strumenti di analisi precedentemente descritti nel capitolo 3 su tre diverse sorgenti di segnale audio:

- pianoforte;
- chitarra elettrica 'in pulito';
- chitarra elettrica 'in overdrive'.

Le registrazioni sono state effettuate all'interno della Digital Audio Workstation (DAW) 'FL Studio 20' (Figura 7.1.). Le DAW sono ambienti di lavoro digitali dedicati all'audio editing.



**Figura 7.1.** Schermata di default all'apertura della DAW 'FL Studio 20'.

Il suono di pianoforte proviene da un Virtual Studio Technology (VST) (Figura 7.2), ossia un'interfaccia software di plug-in audio, che integra soft-synthesizers e unità di effetti all'interno di una DAW.



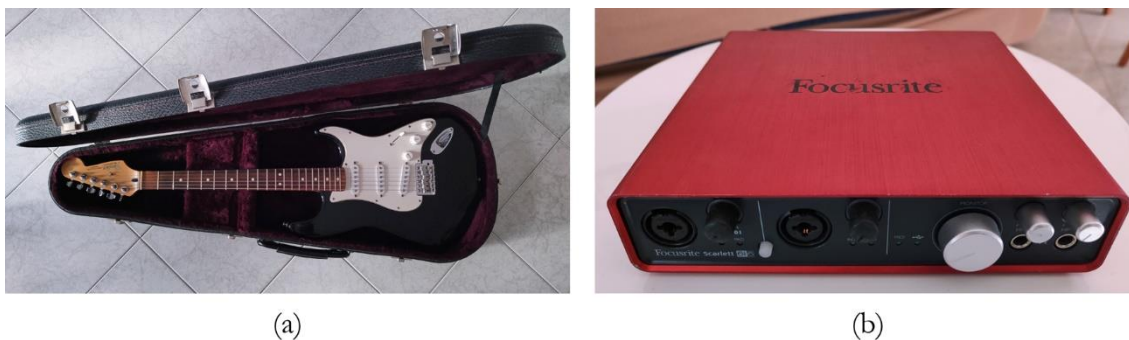
**Figura 7.2.** Logo della tecnologia brevettata Virtual Studio Technology.

È una tecnologia che utilizza l'elaborazione di segnali digitali per simulare strumenti hardware tradizionali attraverso l'uso dei software. Ha conosciuto la diffusione di massa nel momento in cui i computer e le prime DAW hanno iniziato ad essere preferiti ai classici registratori a bobina. Nel particolare, il VST utilizzato è 'FL Keys' (Figura 7.3). FL Keys ha preso in ingresso i messaggi MIDI in cui sono stati codificati gli accordi con intensità e durata prescelta come spiegato nel Capitolo 6.



**Figura 7.3.** Lo strumento VST 'FL Keys'.

I samples di chitarra sono stati registrati suonando una Fender Stratocaster (<https://www.fender.com/it-IT/electric-guitars/stratocaster/>) (Figura 7.4a.) in ingresso all'interfaccia audio USB 'Scarlett 6i6' (Figura 7.4b.); il ruolo di un'interfaccia audio USB è di acquisire il segnale analogico dallo strumento fisico, amplificarlo per mezzo di un preamplificatore, e convertirlo in un segnale audio digitale che viene poi salvato come un file WAV all'interno di una DAW.



**Figura 7.4.** La Fender ‘Stratocaster’ utilizzata per le registrazioni (a) e l’interfaccia audio USB ‘Scarlett 6i6’ (b).

In tabella 7.1. sono elencate le specifiche riguardo i preamplificatori e i convertitori A/D e D/A integrati nella ‘Scarlett 6i6’. I samples sono stati poi processati da ‘TH-U’, un VST che simula l’intera catena hardware di amplificazione per chitarre elettriche.

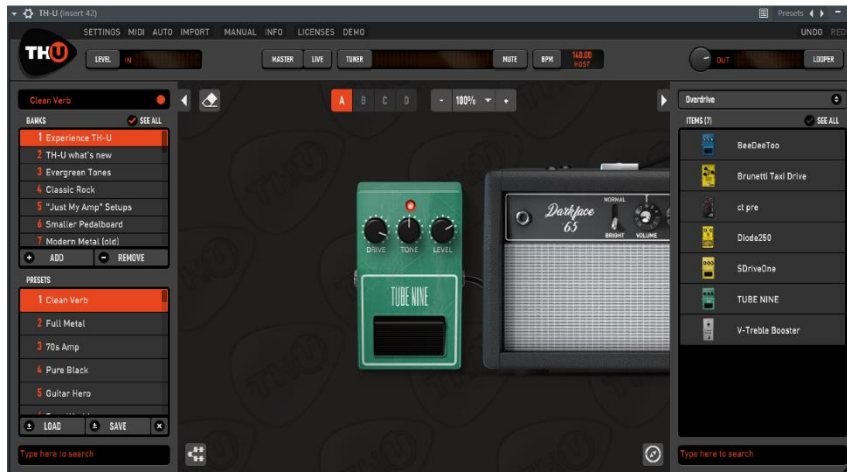
**Tabella 7.1.** – Specifiche dell’interfaccia audio Scarlett 6i6 (Focusrite Public limited company)

<b>CONFIGURATION</b>	
Inputs	6: analogue (4), S/PDIF (2)
Outputs	6: analogue (4), S/PDIF (2)
Mixer	Fully assignable 6-in/6-out
<b>DIGITAL PERFORMANCE</b>	
A-D Dynamic Range	104 dB CCIR-RMS (all inputs)
D-A Dynamic Range	102 dB CCIR-RMS (line outputs)
Supported sample rate	44.1 kHz, 48 kHz, 88.2 kHz & 96 kHz
Clock jitter	< 250 ps
<b>MICROPHONE INPUTS</b>	
Frequency Response	$\pm 0.5$ dB @ 20 Hz, $\pm 0.1$ dB @ 20 kHz; min gain
THD + N	-96 dB (1 kHz, -1dBFS, 20 kHz BW)
Noise EIN	-122 dBu CCIR-RMS (@ 60 dB gain with 150 $\Omega$ termination)
Maximum input level	+9 dBu (without pad)
<b>LINE INPUTS</b>	
Frequency Response	$\pm 0.5$ dB @ 20 Hz , $\pm 0.1$ dB @ 20 kHz (min. gain)
THD + N	-80 dB (1 kHz, -1dBFS, 20 kHz BW)
Noise	-105 dBFS CCIR-RMS (min. gain, 150 $\Omega$ termination)
Maximum input level	+28 dBu
<b>INSTRUMENT INPUTS</b>	
Frequency Response	$\pm 0.3$ dB @ 20 Hz, $\pm 0.1$ dB @ 20 kHz (min. gain)
Noise	-103 dBFS CCIR-RMS (measured at min. gain)
Maximum input level	+8 dB (without pad)
<b>LINE OUTPUTS</b>	
Maximum Output Level (0 dBFS)	+11 dBu, balanced
THD + N	-100 dB (1 kHz, -1dBFS, 20 kHz BW)

Per avere dei confronti più affidabili durante le sperimentazioni, si è deciso di usare la stessa registrazione sia per il segnale ‘in pulito’ che per quello ‘in overdrive’, che quindi differiranno solo per quanto riguarda gli effetti applicati durante la manipolazione con TH-

U. Questa via è stata presa in modo che le differenze nei segnali da analizzare non siano influenzati dalla performance o da altri fattori esterni di disturbo avendo così dei risultati sperimentali più significativi.

Per ottenere il suono “overdrive”, si è inserito, all’inizio della catena virtuale, l’emulazione di un famoso pedale di distorsione della Ibanez (Figura 7.6).



(a)



(b)

**Figura 7.6.** L’emulazione (a) del pedale di distorsione della Ibanez ‘Ts9’ (b).

Distorcere una chitarra elettrica è una tecnica molto utilizzata nella musica leggera: in generale, si simula l’effetto di saturazione del canale, esasperando il clipping, che va a ‘squadrare’ il segnale, arricchendolo di armoniche e restituendo il suono tipico di una chitarra rock.

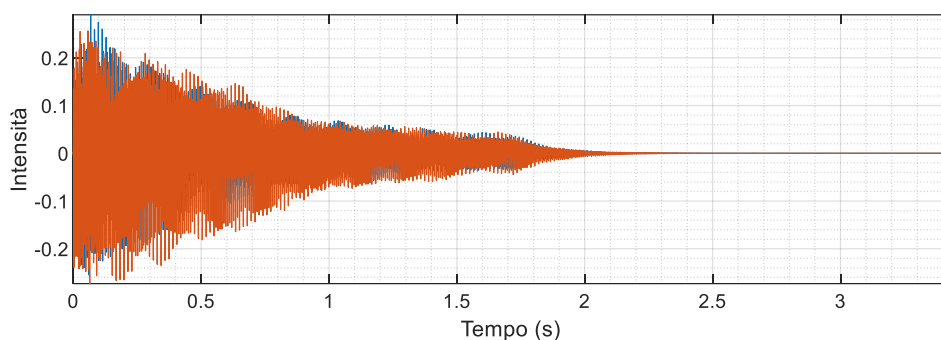
I samples sono stati registrati alla frequenza di campionamento di 44.1 kHz: essendo lo spettro dell’udibile per l’essere umano limitato ai 20 kHz, e seguendo le regole sul campionamento descritte nel capitolo 4, si può capire come questo valore per la frequenza di campionamento sia lo standard per il campionamento musicale. Infine, i file sono stati esportati in formato WAV a 24 bit di profondità.

### 7.3. Analisi dei segnali

#### 7.3.1. Primo esperimento

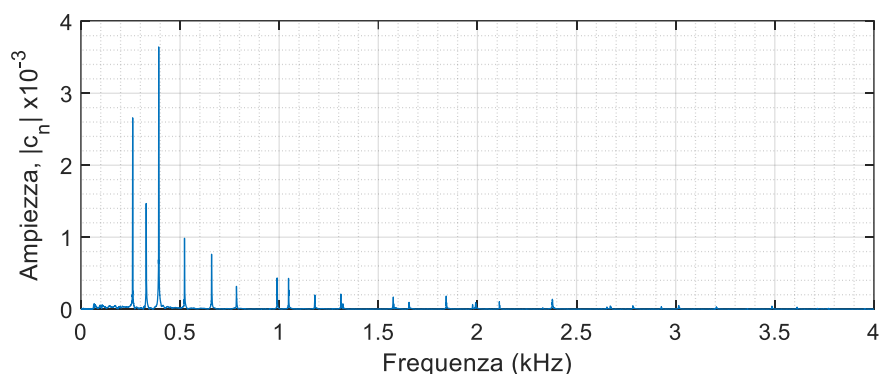
Si è partiti analizzando il segnale audio musicale contenente un accordo di C Major eseguito col pianoforte (simulato con il VST). MATLAB dispone di un comando **audioread** che restituisce le informazioni sul segnale e la sua frequenza di campionamento. La Figura 7.7 riporta il grafico del segnale audio dell’accordo C Major (Do maggiore).





**Figura 7.7.** Segnale audio relativo all'accordo C Major - pianoforte.

Successivamente, utilizzando la funzione **fcoef** (vedi listato al punto 7.5) sono stati calcolati i coefficienti complessi di Fourier del segnale. Questa funzione prende in ingresso il segnale salvato da **audioread**, e, grazie all'implementazione della **fft**, restituisce i coefficienti complessi dell'analisi di Fourier. Il segnale, come detto nel paragrafo precedente, è stato generato da un VST a cui è stato mandato un segnale MIDI in cui sono state codificate le tre note componenti l'accordo, tutte con la medesima key velocity e durata. Questa è un'informazione utile per capire il livello di precisione offerto in questo tipo di analisi, dato che non rientrano variabili dettate dall'accordatura di uno strumento analogico, di performance o altri fattori di disturbo esterni. Ci si aspetta, quindi, di ottenere dei valori molto vicini a quelli teorici, calcolati nel Capitolo 6. Osservando lo spettro nella Figura 7.8, le frequenze individuate dai coefficienti di Fourier corrispondono molto bene a quelle teoriche (quelle effettivamente utilizzati dal generatore) con dei gross pitch errors molto piccoli (Tabella 7.2). I gross pitch errors sono valutati (in percentuale) come rapporto tra la differenza delle frequenze teorica e stimata (ottenuta con il calcolo dei coefficienti di Fourier) e la frequenza teorica.



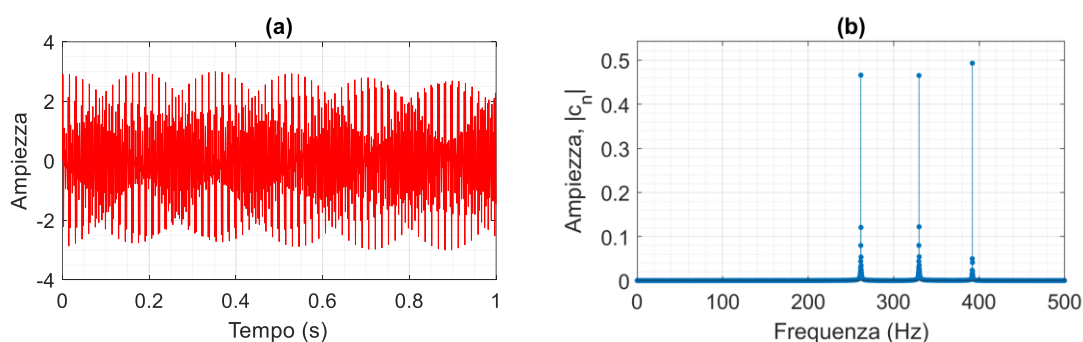
**Figura 7.8.** Segnale audio relativo all'accordo C Major – pianoforte. I primi tre impulsi in bassa frequenza di ampiezza maggiore corrispondono, da sinistra verso destra, alle note C4, E4 e G4.

**Tabella 7.2** – Gross pitch errors.

Nota	Frequenza teorica (Hz)	Frequenza stimata (Hz)	Errore (%)
C4	261,62	261,123	0.19
E4	329,62	329,247	0.11
G4	391,99	392,414	-0.11

Osservando la Figura 7.8, però, si nota il seguente problema: le ampiezze dei coefficienti di Fourier relativi alle tre note dell'accordo hanno valori differenti l'uno dall'altro, nonostante il messaggio MIDI abbia codificato i suoni con la stessa intensità. In particolare, i valori di ampiezza dei coefficienti di Fourier per le tre note sono stati pari a  $2,658 \cdot 10^{-3}$ ,  $1,46 \cdot 10^{-3}$ , e  $3,643 \cdot 10^{-3}$ .

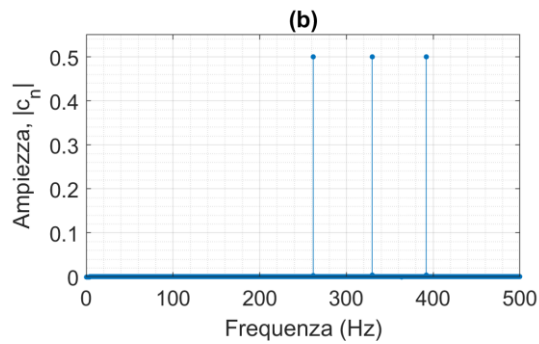
Per cercare di capire meglio il problema, con uno script in MATLAB ho generato un segnale (Figura 7.9a), combinando tre sinusoidi con frequenze pari alle frequenze delle note suonate dal pianoforte, e l'ho analizzato con la stessa procedura utilizzata per il segnale dell'accordo C Major (Figura 7.7). Anche in questo caso, i coefficienti di Fourier relativi alle frequenze dei tre toni puri mostrano ampiezze diverse, seppure con differenze reciproche meno accentuate (Figura 7.9b): 0,466, 0,465 e 0,493, contro il valore atteso di 0,5 per tutti e tre. Per quanto riguarda le frequenze stimate, sono stati calcolati dei gross pitch errors inferiori al 7 % per tutte le note. Quindi, il problema evidenziato per l'accordo con il pianoforte permane anche per il segnale combinato dei tre toni (tre sinusoidi). In quest'ultimo caso, tuttavia, bisogna dire che il suono riprodotto non è (per niente) piacevole quanto a quello dell'accordo con il pianoforte.



**Figura 7.9.** (a) Segnale risultante dalla sovrapposizione di tre sinusoidi (zoom del primo secondo); (b) spettro di ampiezza fino a 500 Hz.

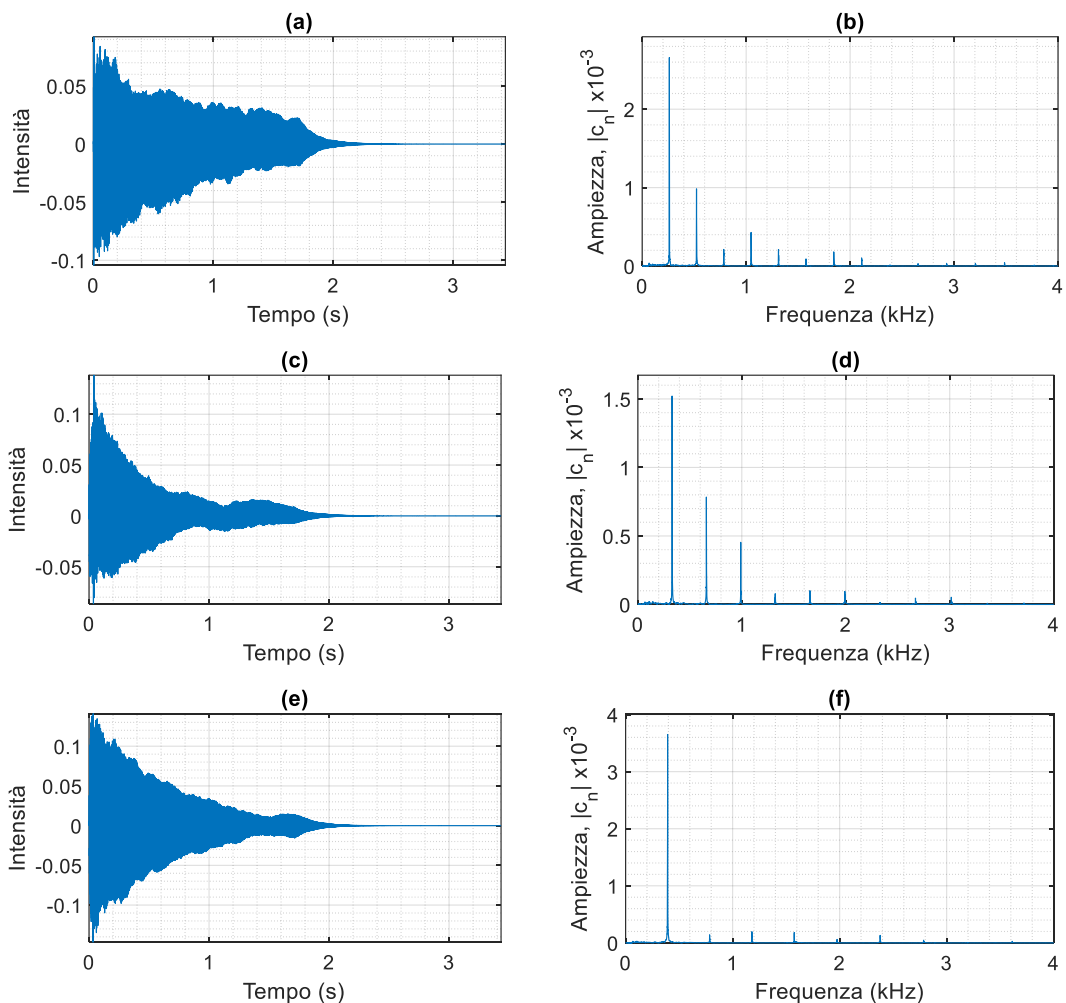
Da questo primo confronto, ed osservando nel dettaglio gli spettri, sembrerebbe che il problema sia probabilmente dovuto, almeno in parte, alla limitata risoluzione spettrale, dovuta alla limitata durata temporale del segnale, e al leakage spettrale (vedi punti 5.4.2.1 e 5.4.2.2 del Capitolo 5). Per verificare tale ipotesi, è stato testato lo stesso segnale con i tre toni puri ma con una durata del segnale di 100 s, 10 volte superiore al precedente. In questo caso lo spettro mostra i tre coefficienti con la stessa ampiezza, come mostrato in Figura 7.10, e con gross pitch errors pari a zero. Almeno da questa analisi, pertanto, sembrerebbe

che i problemi siano appunto di risoluzione spettrale insufficiente, che si potrebbe migliorare, per esempio, con la tecnica “zero-padding”, e di leakage spettrale, che si potrebbe attenuare “finestrando” i segnali con opportune “windows”.



**Figura 7.10.** Segnale risultante dalla sovrapposizione di tre sinusoidi di lunghezza pari a 100 s.

Per approfondire ulteriormente la questione, ho pensato di registrare tre segnali audio con il pianoforte, separatamente uno per ogni nota dell'accordo di C Major. Nella Figura 7.11 sono rappresentati i grafici temporali e gli spettri per le tre note.

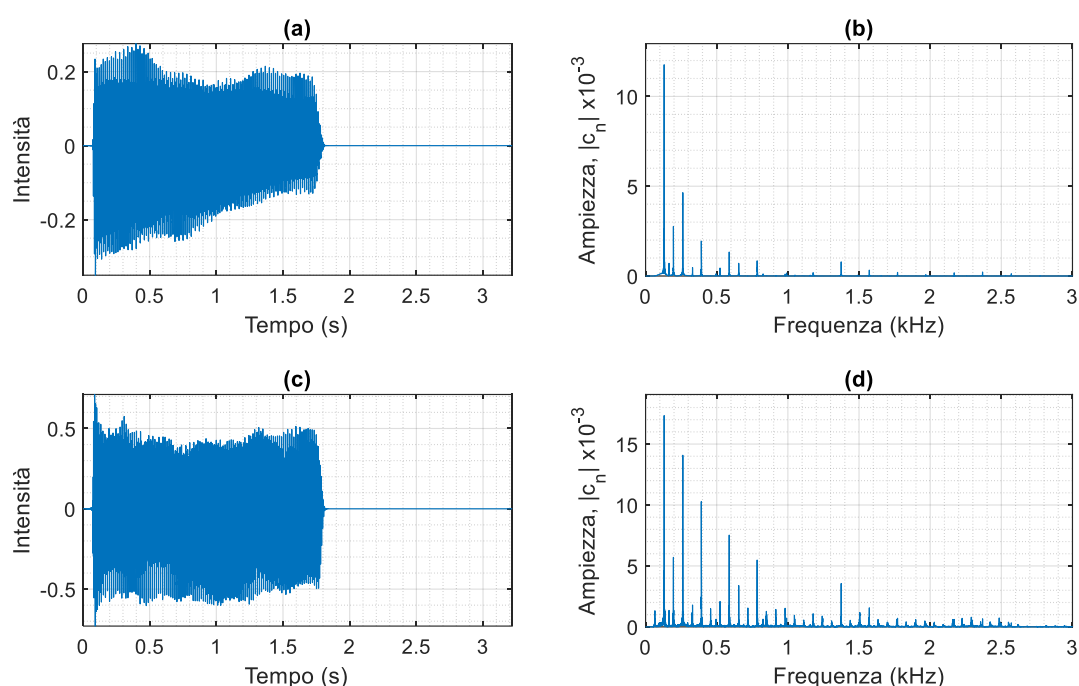


**Figura 7.11.** (a) (c) e (d) segnali nel tempo delle note C4, E4 e G4; (b) (d) e (f) spettri di ampiezza dei segnali C4, E4 e G4. Negli spettri, oltre alle note base (frequenze fondamentali) ci sono tante armoniche con ampiezze molto differenti le une dalle altre.

I risultati di questo esperimento ci forniscono subito delle informazioni aggiuntive: notiamo come nel grafico dei coefficienti di Fourier di C4, compaiono non solo il coefficiente relativo appunto al C4, ma anche quelli di C delle ottave successive, oltre ad altre armoniche, tra cui, ad esempio, G4. Nel suonare le tre note insieme, perciò, abbiamo dei fenomeni di sovrapposizione di coefficienti di Fourier che ne modificano l'ampiezza. In gergo musicale, queste armoniche sono chiamate "overtones". Possiamo ipotizzare che il timbro dello strumento abbia quindi un ruolo importante nella determinazione dei coefficienti di Fourier, e ne faccia emergere i limiti in alcune applicazioni, quali, per esempio, il riconoscimento di accordi.

### 7.3.2. Secondo esperimento

Dopo aver testato l'accuratezza nel determinare i coefficienti di Fourier con il suono del pianoforte, ho focalizzato l'attenzione sull'analisi del segnale audio musicale generato da una chitarra elettrica Fender Stratocaster, sia in "pulito" che con "overdrive". La Figura 7.12 mostra i segnali dell'accordo C Major suonato nelle due modalità.



**Figura 7.12.** Segnale audio dell'accordo C Major con una chitarra Fender Stratocaster. (a) e (b) segnale nel tempo e spettro di ampiezza in modalità "pulito"; (c) e (d) segnale nel tempo e spettro di ampiezza in modalità "overdrive".

Una prima applicazione l'ho dedicata alla verifica dell'accordatura e dell'intonazione della chitarra. I dati riportati nella Tabella 7.3 attestano che ho fatto un buon lavoro nell'accordare la chitarra prima di eseguire la registrazione digitale. Inoltre, i dati in Tabella 7.3 costituiscono una prova che tutta la catena di acquisizione audio dal mondo analogico possiede un'ottima fedeltà.

**Tabella 7.3** – Gross pitch errors del segnale audio della chitarra elettrica utilizzata per i test.

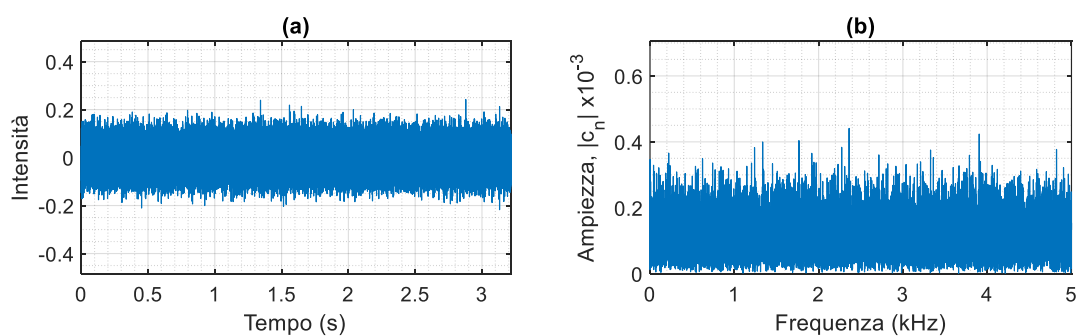
Nota	Frequenza teorica (Hz)	Frequenza stimata (Hz)	Errore (%)
C3	130,81	130,709	0.07
E3	164,81	164,984	-0.1
G3	196,00	195,709	0.15

È stato interessante analizzare il segnale audio della chitarra in overdrive: è evidente l'effetto della saturazione nell'enfasi donata alle varie armoniche dell'accordo, che vanno a creare un suono che potremmo descrivere come più "ricco" e "pieno". È inoltre ancora più evidente l'ampiezza elevata di G rispetto alle altre armoniche: ciò mi ha fatto ricollegare questa informazione a un fatto empirico che gli amanti di generi musicali quali hard rock o metal conosceranno; è prassi, infatti, nei suddetti generi, ricorrere alla tecnica del "power chord": è una tecnica chitarristica per la quale si suonano accordi composti solamente da due note, la fondamentale e il suo intervallo di quinta, che nel nostro caso sono appunto C e G. Questo perché si ottiene un suono allo stesso modo soddisfacente con meno risorse richieste al musicista, che può quindi esprimersi in passaggi più intricati, muovendosi più agevolmente sulla tastiera della chitarra, senza dover rinunciare al giusto impatto sonoro.

Una possibile applicazione futura potrebbe essere quella di sottrarre dal segnale audio in overdrive quello in "pulito", in modo da poter poi analizzare solo il carattere della distorsione, e poter fare paragoni così tra vari effetti di distorsione e saturazione.

### 7.3.3. Terzo esperimento

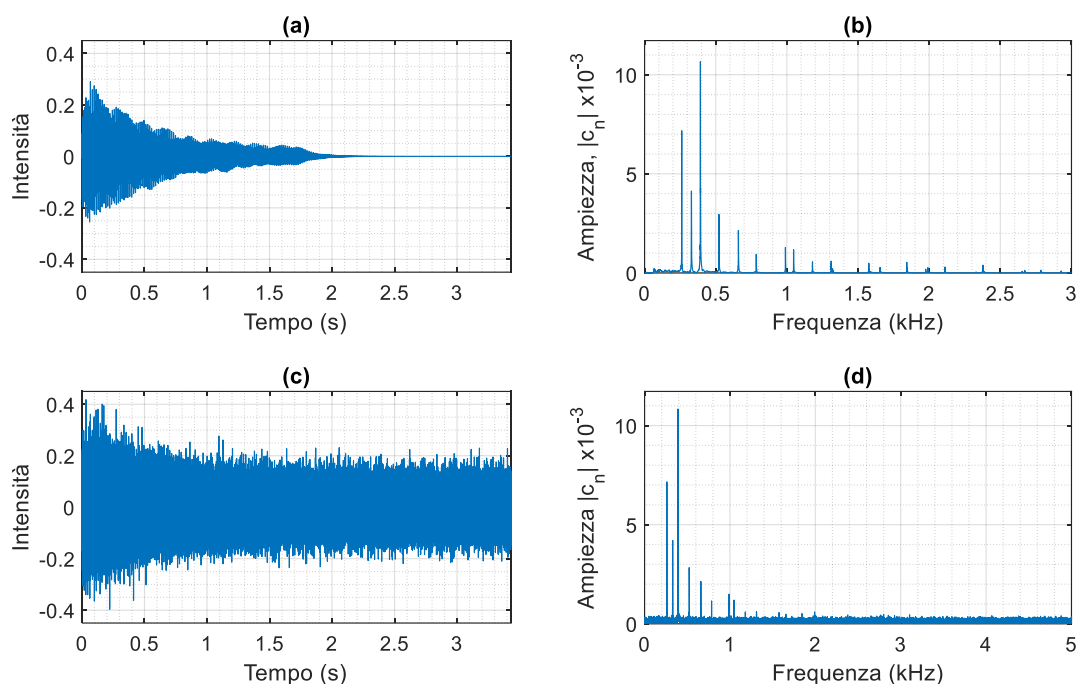
Si è poi proceduto nell'utilizzare l'analisi di Fourier per semplici operazioni di filtraggio; si è generato un segnale di rumore bianco, sovrapposto poi al segnale audio di partenza. Vediamo i coefficienti di Fourier sparsi su tutto lo spettro: è infatti una delle caratteristiche del rumore bianco (Figura 7.13).



**Figura 7.13.** (a) Rumore casuale, detto rumore bianco; (b) Spettro di ampiezza di Fourier del rumore bianco.

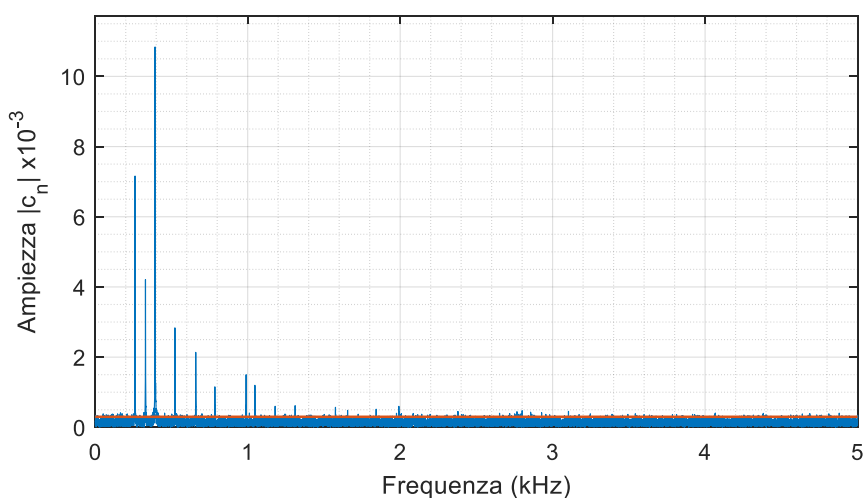
In Figura 7.14 è mostrato il segnale relativo all'accordo di C Major, con pianoforte, a cui è stato addizionato un rumore bianco. In particolare, è stato addizionato un rumore il cui livello è pari al 20% della massima intensità del segnale pulito. Nello spettro di ampiezza

(Figura 7.14d) il livello massimo dei coefficienti di Fourier del rumore è pari circa il 2,8% del valore massimo dei coefficienti di Fourier del segnale pulito.



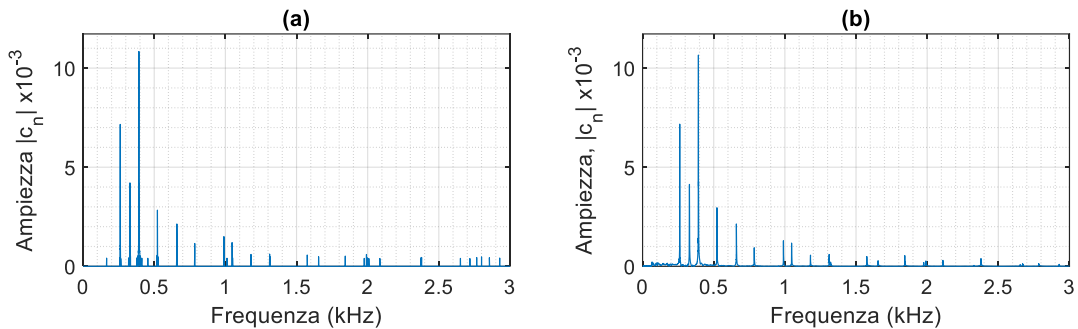
**Figura 7.14.** (a) e (b) Segnale pulito e corrispondente spettro di ampiezza; (c) e (d) segnale più rumore e corrispondente spettro.

Per poter eliminare il rumore (o meglio per poterlo attenuare) bisogna innanzitutto valutare nello spettro una soglia in ampiezza al di sotto della quale sia presente la maggior parte dei coefficienti di Fourier del rumore. Nel caso mostrato in Figura 7.14, osservando lo spettro di Fourier del segnale rumoroso (Figura 7.14d), è possibile individuare una soglia di ampiezza pari a circa 0,4, come mostrato in Figura 7.15.



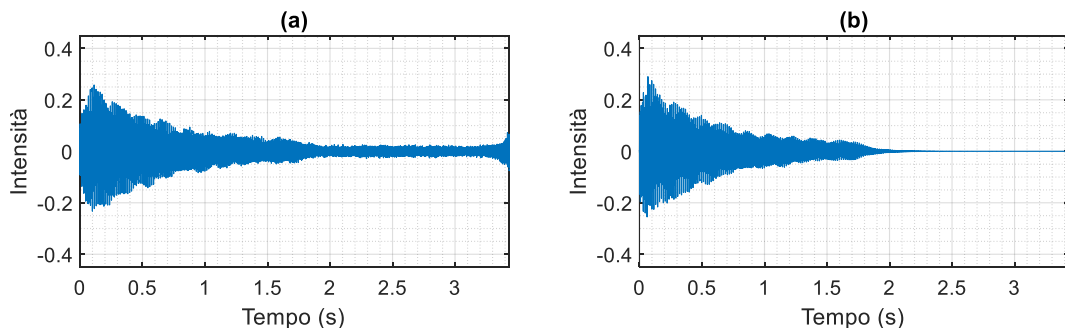
**Figura 7.15.** Spettro di ampiezza di Fourier del segnale rumoroso mostrato in Figura 4.17d. La retta orizzontale in rosso rappresenta la soglia al di sotto della quale è presente la maggior parte del rumore.

Filtrando il segnale rumoroso, cioè azzerando la parte di spettro al di sotto della soglia, è possibile ricostruire il segnale pulito applicando la trasformata inversa di Fourier. A tal fine, nel caso specifico, dopo aver azzerato lo spettro al di sotto della soglia è stata utilizzata la function **fsum** (vedi listato al punto 7.5) che implementa, appunto, la **ifft**, ossia la trasformata inversa di Fourier. Sia ascoltando il segnale audio che osservando lo spettro di Fourier risultante (Figura 7.16a) in confronto con quello originale pulito, si può dire che l'accordo di C Major è ancora riconoscibile, ma non è identico al segnale originale.



**Figura 7.16.** (a) spettro di ampiezza del segnale ricostruito; (b) spettro di ampiezza del segnale originario pulito.

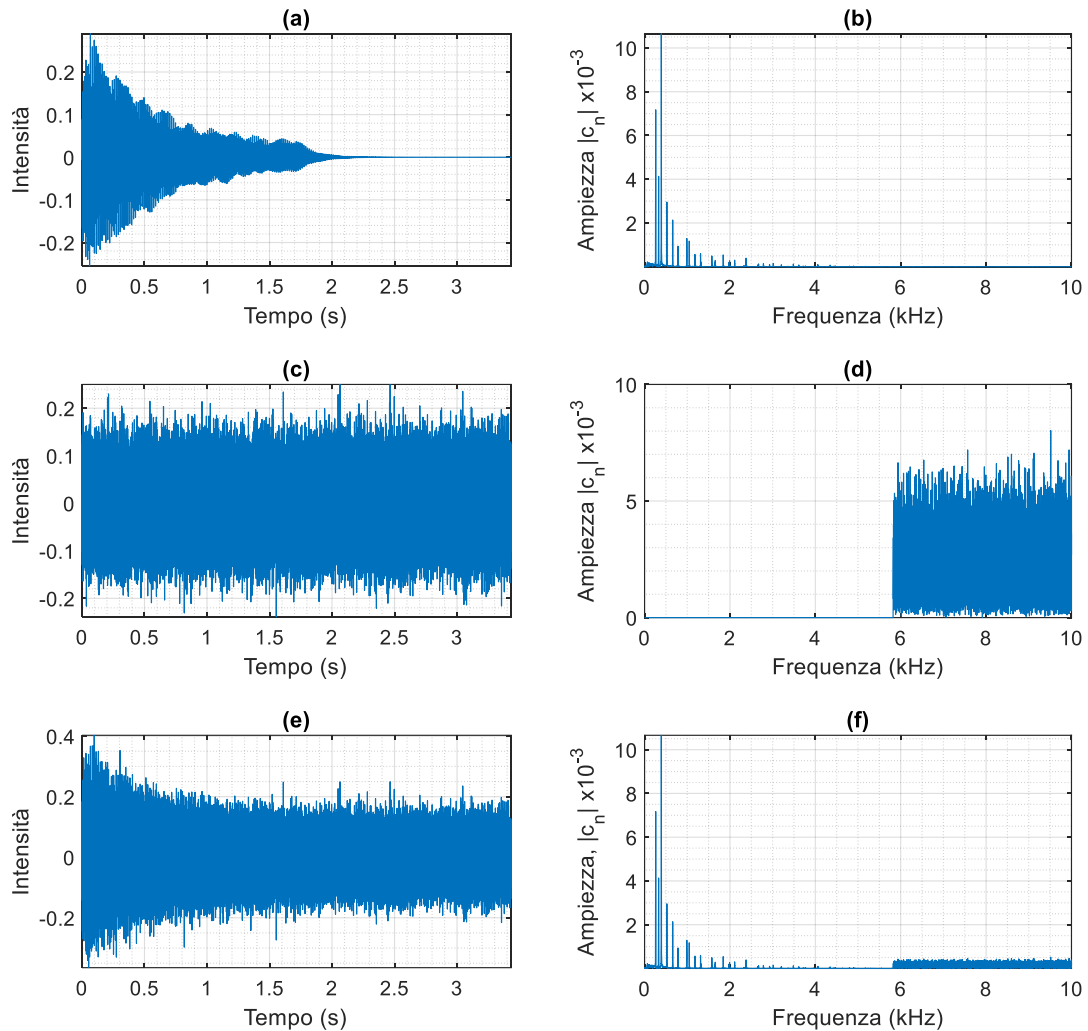
Il filtraggio ha certamente attenuato il rumore ma ha anche alterato alcune parti del segnale. In particolare, ha alterato quelle parti relative all'inizio del suono laddove le note suonate con un pianoforte presentano un *transiente* d'attacco. Tale transiente è dovuto al fatto che quando un tasto di pianoforte viene premuto si ha un picco di energia che caratterizza il suono con delle componenti inarmoniche distribuite su tutto lo spettro, come il rumore. La Figura 7.17 mostra il confronto tra il segnale filtrato e quello originario pulito. Dalla Figura 7.17 si può solo osservare che il rumore è stato sicuramente attenuato: leggendo i valori del rumore prima e dopo il filtraggio, quest'ultimo riduce il rumore da una intensità di 0,2 a una di circa 0,02. Solo l'ascolto, tuttavia, può fare apprezzare pregi e difetti del filtraggio applicato.



**Figura 7.17.** (a) spettro di ampiezza del segnale ricostruito; (b) spettro di ampiezza del segnale originario pulito.

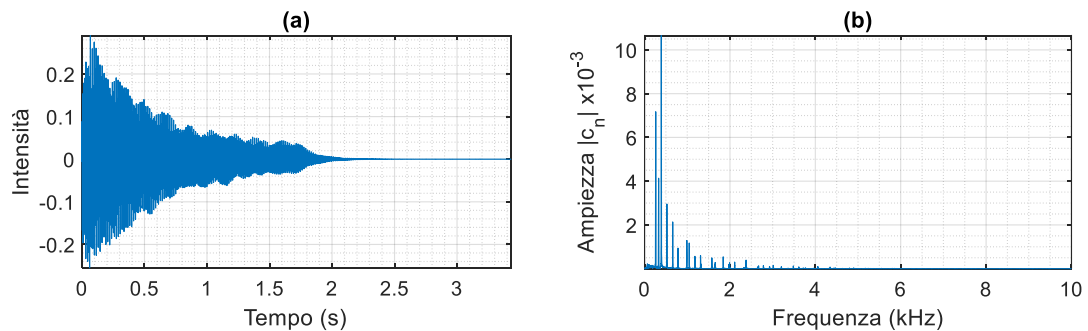
Nel caso dei rumori a banda limitata i filtri possono essere applicati con maggiore efficacia. Dallo spettro di Fourier del segnale rumoroso è possibile stimare efficacemente la

banda di frequenze che contengono il rumore. L'efficacia del filtro, tuttavia, dipende da quanto gli spettri del segnale e del rumore risultano sovrapposti. Più piccola è la sovrapposizione, migliore sarà l'effetto del filtraggio. In Figura 7.18 è mostrato il segnale di un accordo di C Major, suonato con il pianoforte, a cui è stato addizionato un rumore di banda limitata.

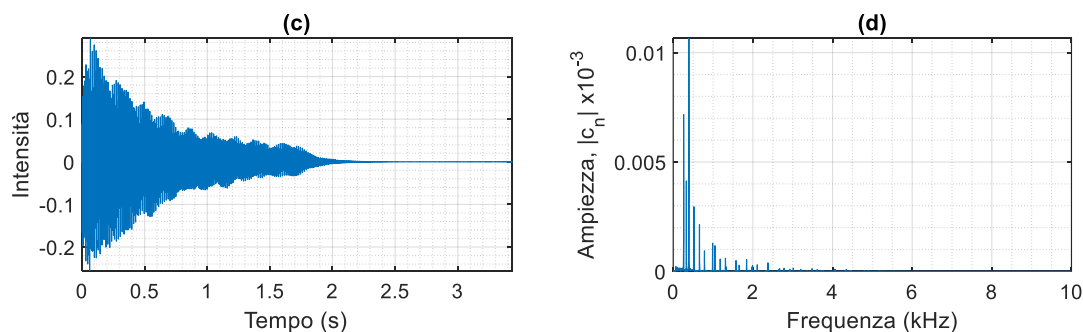


**Figura 7.18.** (a) e (b) Segnale pulito e corrispondente spettro; (c) e (d) rumore e corrispondente spettro; (e) e (f) segnale più rumore e corrispondente spettro.

Applicando la funzione **passabasso** (vedi listato al punto 7.5), e ricostruendo il segnale, possiamo farne un confronto con quello di partenza alla Figura 7.19.



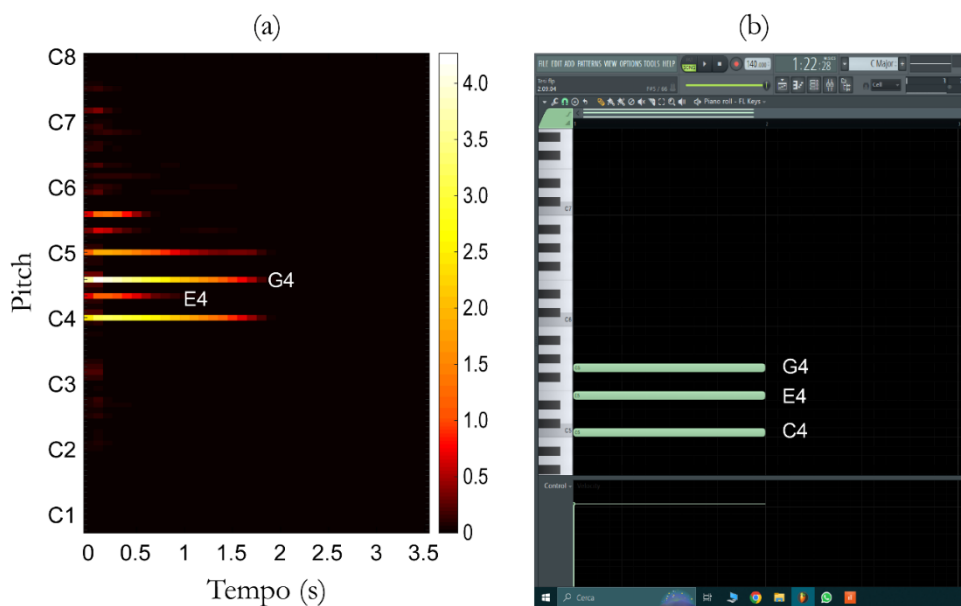




**Figura 7.19.** (a) e (b) Segnale pulito e corrispondente spettro di ampiezza; (c) e (d) segnale filtrato ricostruito e corrispondente spettro.

#### 7.4. Analisi del segnale con il Chroma Toolbox

Alcune applicazioni più avanzate sono state fatte con l'utilizzo di 'Chroma Toolbox' [7], un pacchetto software implementato in Matlab le cui basi sono descritte approfonditamente in [15], [17]. In particolare, sono state testate qui alcune funzionalità degli strumenti audio *Chroma-Based*, ossia riferite alla scala musicale già presentata nel Capitolo 6. Strumenti molto utili pensati specificamente per problemi della sfera musicale. Ad esempio, con la funzione **convert\_audio\_to\_pitch**, possiamo vedere una rappresentazione nel tempo dell'accordo suonato al piano (Figura 7.20), di cui possiamo quindi ora vederne anche la durata e il contenuto in frequenza.

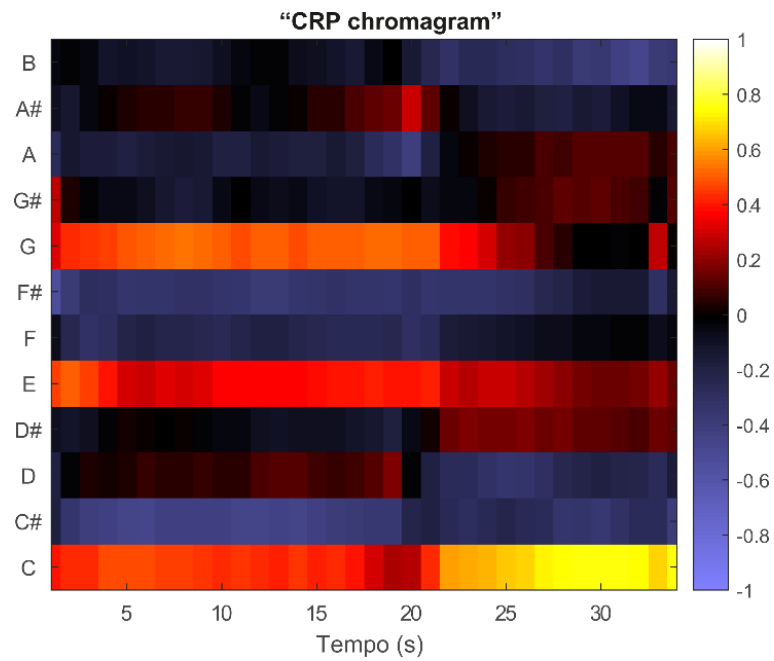


**Figura 7.20.** Confronto tra (a) l'output della funzione **convert\_audio\_to\_pitch** di Chroma Toolbox e (b) il piano roll integrato in FL Studio.

Da notare la somiglianza di una simile rappresentazione a quella del piano roll trattata precedentemente.

Grazie ad algoritmi più elaborati, si possono anche minimizzare gli effetti derivanti dal timbro dello strumento: con la funzione **convert\_audio\_to\_CRP** (Chroma DCT-Reduced log Pitch, con spiegazione più dettagliata in [7]) possiamo vedere la precisione con cui il

programma riconosce le note componenti l'accordo, in modo molto più chiaro rispetto a tutte le altre rappresentazioni, anche analizzando un segnale più complesso dal punto di vista dello spettro come quello di una chitarra elettrica in overdrive (Figura 7.21).



**Figura 7.21.** Cromagramma dell'accordo C Major suonato con chitarra elettrica con overdrive

## 7.5 Listati di alcune Matlab functions utilizzate negli esperimenti

### 1. funzione fcoef

```
function [c,a,b] = fcoef(f)
% fcoef calcola i coefficienti complessi di Fourier di un segnale digitale
% Input:
%     segnale digitale
% Outputs
%     c = coefficienti complessi di Fourier
%
% Tesi di laurea in Ingegneria Elettrica, Elettronica e Informatica
% Tesista: Giovanni Deidda
% Relatore: Prof. Giuseppe Rodriguez
% Febbraio 2023
%
% Autore: Prof. Giuseppe Rodriguez
%
if min(size(f)) ~= 1, error('input is not a vector. '), end
f = f(:);
n = size(f,1);
%
c = ifftshift(fft(fftshift(f)) / n);
%
if nargin > 1
    k = floor(n/2) + 1;
    a = c(k:n) + c(k:-1:2-mod(n,2));
    b = i*(c(k+1:n) - c(k-1:-1:2-mod(n,2)));
end
```

### 2. funzione fsum

```
function f = fsum(c)
% fsum calcola la trasformata inversa di Fourier
% Input:
%     c= coefficienti complessi della Trasformata di Fourier
% Outputs
%     f = funzione digitale ricostruita
%
% Tesi di laurea in Ingegneria Elettrica, Elettronica e Informatica
% Tesista: Giovanni Deidda
% Relatore: Prof. Giuseppe Rodriguez
% Febbraio 2023
%
% Autore: Prof. Giuseppe Rodriguez
%
if min(size(c)) ~= 1, error('input is not a vector. '), end
c = c(:);
n = size(c,1);
%
f = ifftshift(ifft(fftshift(c)) * n);
%
```

### 3. funzione passaalto

```
function y = passaalto(y,win)
% passaalto genera un filtro passa alto in dominio di frequenza
% Input:
%     y = coefficienti complessi della sequenza rumore generato
%     win = apertura del filtro in campioni
% Outputs
%     y = coefficienti complessi di Fourier del filtro
%
% Tesi di laurea in Ingegneria Elettrica, Elettronica e Informatica
% Tesista: Giovanni Deidda
% Relatore: Prof. Giuseppe Rodriguez
% Febbraio 2023
%
% Autore: Prof. Giuseppe Rodriguez
%
y = y(:);
mezzo = floor(size(y,1)/2)+1;
y([mezzo-win:mezzo+win]) = 0;
```

### 4. funzione passabasso

```
function y = passabasso(y,win)
% passabasso genera un filtro passa basso in dominio di frequenza
% Input:
%     y = coefficienti complessi della sequenza rumore generato
%     win = apertura del filtro in campioni
% Outputs
%     y = coefficienti complessi di Fourier del filtro
%
% Tesi di laurea in Ingegneria Elettrica, Elettronica e Informatica
% Tesista: Giovanni Deidda
% Relatore: Prof. Giuseppe Rodriguez
% Febbraio 2023
%
% Autore: Prof. Giuseppe Rodriguez
%
y = y(:);
mezzo = floor(size(y,1)/2)+1;
y([1:mezzo-win mezzo+win:end]) = 0;
```

# Bibliografia

- [1] D. P. Nicolalde Rodríguez, J. A. Apolinário, and L. W. P. Biscainho, “Audio authenticity: Detecting ENF discontinuity with high precision phase analysis,” *IEEE Trans. Inf. Forensics Secur.*, vol. 5, no. 3, pp. 534–543, Sep. 2010, doi: 10.1109/TIFS.2010.2051270.
- [2] T. M. Peter and J. Williams, Eds., *The Fourier Transform in Biomedical Engineering*. Birkhäuser Boston, 1998.
- [3] C. Yeh, A. Roebel, and X. Rodet, “Multiple fundamental frequency estimation and polyphony inference of polyphonic music signals,” *IEEE Trans. Audio, Speech Lang. Process.*, vol. 18, no. 6, pp. 1116–1126, 2010, doi: 10.1109/TASL.2009.2030006.
- [4] E. Nakamura, E. Benetos, K. Yoshii, and S. Dixon, “Towards Complete Polyphonic Music Transcription: Integrating Multi-Pitch Detection and Rhythm Quantization,” *ICASSP, IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process. - Proc.*, vol. 2018-April, pp. 101–105, Sep. 2018, doi: 10.1109/ICASSP.2018.8461914.
- [5] J. A. Moorer, “Signal Processing Aspects of Computer Music: A Survey,” *Proc. IEEE*, vol. 65, no. 8, pp. 1108–1137, 1977, doi: 10.1109/PROC.1977.10660.
- [6] W. J. Pielemeier and G. H. Wakefield, “A high-resolution time–frequency representation for musical instrument signals,” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 99, no. 4, p. 2382, Aug. 1998, doi: 10.1121/1.415426.
- [7] M. Muller and S. Ewert, “Chroma Toolbox: Matlab Implementations for Extracting Variants of Chroma-Based Audio Features,” in *12th International Society for Music Information Retrieval Conference (ISMIR 2011)*, pp. 215–220.
- [8] E. Benetos and S. Dixon, “Joint multi-pitch detection using harmonic envelope estimation for polyphonic music transcription,” *IEEE J. Sel. Top. Signal Process.*, vol. 5, no. 6, pp. 1111–1123, Oct. 2011, doi: 10.1109/JSTSP.2011.2162394.
- [9] N. Kumar and R. Kumar, “Wavelet transform-based multipitch estimation in polyphonic music,” *Helvion*, vol. 6, no. 1, p. e03243, Jan. 2020, doi: 10.1016/J.HELIYON.2020.E03243.
- [10] T. K. Muhaseena and M. S. Lekshmi, “A Model for Pitch Estimation Using Wavelet Packet Transform Based Cepstrum Method,” *Procedia Technol.*, vol. 24, pp. 1061–1067, Jan. 2016, doi: 10.1016/J.PROTCY.2016.05.236.
- [11] G. Rodriguez and S. Seatzu, *Introduzione alla Matematica Applicata e Computazionale*, 2a Ed. Bologna: Pitagora Editrice, 2017.
- [12] P. Suetens, *Fundamentals of medical imaging*, Third. New York: Cambridge University Press, 2017.
- [13] J. P. Pickett, J. R. Rickford, S. Pinker, C. Watkins, and J. Huehnergard, “The American Heritage dictionary of the English language.” Harper Collins Publishers, p. 2084, 2018.
- [14] H. Fletcher, “Loudness, Pitch and the Timbre of Musical Tones and Their Relation to the Intensity, the Frequency and the Overtone Structure,” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 6, no. 2, p. 59, Jun. 2005, doi: 10.1121/1.1915704.

- [15] M. Müller, “Fundamentals of Music Processing,” *Fundam. Music Process.*, 2015, doi: 10.1007/978-3-319-21945-5.
- [16] E. Cosimi, *Manuale di musica elettronica : teoria e tecnica dei sintetizzatori*. Milano: Tecniche Nuove, 2011.
- [17] M. Müller, *Fundamentals of Music Processing*. Springer International Publishing, 2021.