① Stabilire per quali valori $\gamma = \frac{1}{2}$ e $\gamma = \frac{3}{8}$ il seguente metodo multistep è stabile:

$$\eta_{k+2} = \frac{3}{2}\eta_{k+1} - \gamma\eta_k + 2h\, f(x_k, \eta_k)$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$$\eta_{k+2} - \frac{3}{2}\eta_{k+1} + \gamma\eta_k = h\left[2 f(x_k, \eta_k)\right]$$

$a_2 = 1$ $\quad b_0 = 2$

$a_1 = -\frac{3}{2}$ $\quad b_1 = 0$

$a_0 = \gamma$ $\quad b_2 = 0$

$$p(\omega) = a_2\omega^2 + a_1\omega + a_0 = \omega^2 - \frac{3}{2}\omega + \gamma$$

- $\gamma = \frac{1}{2} \to p(\omega) = \omega^2 - \frac{3}{2}\omega + \frac{1}{2} = 0$

$$\frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}}{2} \begin{cases} \to \frac{2}{2} = 1 \\ \to \frac{1}{2} \end{cases}$$

stabile

- $\gamma = \frac{3}{8} \to p(\omega) = \omega^2 - \frac{3}{2}\omega + \frac{3}{8} = 0$

$$\frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{3}{2}}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4}}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{3}$$

non stable

perché $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{3} > 1$

② Eseguire i primi due passi nella risoluzione con il metodo di Eulero-Cauchy del seguente sistema differenziale

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 2y_1y_2 \\ y_2' = 4y_1y_2 - 5y_2 \\ y_1(0) = 2 \quad y_2(0)=1 \end{cases}$$

$$f_1(x,y_1,y_2) = 2y_1 - 2y_1y_2$$
$$f_2(x,y_1,y_2) = 4y_1y_2 - 5y_2$$

Soluzione:

$$\begin{cases} \eta_{1,i+1} = \eta_{1,i} + h f_1(x_i, \eta_{1,i}, \eta_{2,i}) \\ \eta_{2,i+1} = \eta_{2,i} + h f_2(x_i, \eta_{1,i}, \eta_{2,i}) \\ \eta_{1,0} = 2 \qquad \eta_{2,0} = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f_1(0,2,1) &= 2\cdot 2 - 2\cdot 2\cdot 1 = 0 \\ f_2(0,2,1) &= 4\cdot(2)(1) - 5(1) = 3 \end{aligned}}$$

$$\begin{cases} \eta_{1,1} = \eta_{1,0} + \frac{1}{2} f_1(x_0, \eta_{1,0}, \eta_{2,0}) = 2 + \frac{1}{2} f_1(0,2,1) = 2+0 = 2 \\ \eta_{2,1} = \eta_{2,0} + \frac{1}{2} f_2(x_0, \eta_{1,0}, \eta_{2,0}) = 1 + \frac{1}{2} f_2(0,2,1) = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \eta_{1,2} = \eta_{1,1} + \frac{1}{2} f_1(x_1, \eta_{1,1}, \eta_{2,1}) = 2 + \frac{1}{2} f_1\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{5}{2}\right) = -1 \\ \eta_{2,2} = \eta_{2,1} + \frac{1}{2} f_2(x_1, \eta_{1,1}, \eta_{2,1}) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} f_2\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} - \frac{15}{4} = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$f_1\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{5}{2}\right) = 2(2) - 2(2)\cdot\frac{5}{2} = -6$$

$$f_2\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{5}{2}\right) = 4(2)\left(\frac{5}{2}\right) - 5\left(\frac{5}{2}\right) = 20 - \frac{25}{2} = \frac{15}{2}$$

③ Stabilire per quali valori di $\gamma = 1,2,3$ il metodo multistep è stabile:

$$\begin{cases} \eta_{i+2} = \frac{\gamma}{2}\eta_{i+1} + (2-\gamma)\eta_i + 2h f(x_i, \eta_i) \\ \eta_0 = y_0 \quad \eta_1 = y_1 \end{cases}$$

Soluzione:

$$\eta_{i+2} - \frac{\gamma}{2}\eta_{i+1} - (2-\gamma)\eta_i = h\left[2 f(x_i, \eta_i)\right]$$

$$a_2 = 1 \quad a_1 = \frac{\gamma}{2} \quad a_0 = -(2-\gamma)$$

$$\rho(w) = w^2 - \frac{\gamma}{2}w - (2-\gamma)$$

- $\gamma = 1 \rightarrow \rho(w) = w^2 - \frac{1}{2}w - 1 = 0$

$$w_{1/2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 4}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4}}}{2} = \frac{1}{4}\left(1 \pm \sqrt{17}\right)$$

non è stabile perché $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17} > 1$

- $\gamma = 2 \rightarrow \rho(w) = w^2 - w = w(w-1) = 0$

$w = 0$
$w = 1$ stabile

- $\gamma = 3 \rightarrow \rho(w) = w^2 - \frac{3}{2}w + 1 = 0$

$$w_{1/2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 4}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{7}{4}}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{7}}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(3 \pm \sqrt{7}\,i\right)$$

perché pur avendo modulo 1 sono distinte

Sono due numeri complessi coniugati della forma $z = c + id$ e il loro modulo è

$$|z| = \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{7}{16}} = \sqrt{1} = 1$$ doppia

quindi ~~non~~ è stabile

④ Dimostrare che il metodo alle differenze

$$\eta_{k+2} = \frac{3}{2}\eta_{k+1} - \frac{1}{2}\eta_k + 2h f(x_k, \eta_k)$$

è stabile e che per $a = \frac{1}{2}$ rappresenta un metodo del 1° ordine:

Soluzione:

$$\eta_{k+2} - \frac{3}{2}\eta_{k+1} + \frac{1}{2}\eta_k = h\left[2 f(x_k, \eta_k)\right]$$

$a_2 = 1 \quad a_1 = -\frac{3}{2} \quad a_0 = \frac{1}{2}$

$b_2 = b_1 = 0 \quad b_0 = 2.$

Stabilità: $\rho(\omega) = \omega^2 - \frac{3}{2}\omega + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow 2\omega^2 - 3\omega + 1 = 0$

$$\omega_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 1 \end{cases} \quad \text{stabile}$$

consistenza:

In generale $\tau(x,h) = \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{r} a_j y(x+jh) - \sum_{j=0}^{r} b_j y'(x+jh)$

Per noi $r=2$ e $b_0 = \frac{1}{2}$ quindi:

$$\tau(x,h) = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2}y(x) - \frac{3}{2}y(x+h) + y(x+2h)\right] - \frac{1}{2}y'(x)$$

il cui sviluppo è:

$$\tau(x,h) = \frac{1}{h}\left\{\frac{1}{2}\cancel{y(x)} - \frac{3}{2}\left[\cancel{y(x)} + y'(x)\cdot h + y''(x)\cdot\frac{h^2}{2} + O(h^3)\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\cancel{y(x)} + y'(x)2h + y''(x)4\frac{h^2}{2} + O(h^3)\right]\right\} - \frac{1}{2}y'(x) =$$

$$= -\frac{3}{2}\cancel{y'(x)} - \frac{3}{4}y''(x)\cdot h + \cancel{y'(x)}\cdot 2 + y''(x)2h + O(h^2) - \cancel{\frac{1}{2}y'(x)} =$$

$$= \left(-\frac{3}{4}y''(x) + 2y''(x)\right)\cdot h + O(h^2) = \frac{5}{4}y''(x)\cdot h + O(h^2) =$$

$= O(h)$ cioè è un metodo del 1° ordine

⑤ Dimostrare che per $a=3$ il metodo alle differenze

$$\eta_{k+2} = 2\eta_{k+1} - 2\eta_k - h\, f(x_k, \eta_k)$$

è consistente ma non stabile:

Soluzione:

$$\eta_{k+2} - 3\eta_{k+1} + 2\eta_k = h\left[-f(x_k, \eta_k)\right]$$

$a_2 = 1 \quad a_1 = -3 \quad a_0 = 2 \qquad\qquad b_2 = b_1 = 0 \quad b_0 = -1$

Stabilità:

$$\rho(w) = w^2 - 3w + 2 = 0$$

$$w_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

non stabile perché $2 > 1$.

Consistenza:

$$\tau(x,h) = \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{r} a_j\, y(x+jh) - \sum_{j=0}^{r} b_j\, y'(x+jh) =$$

$$= \frac{1}{h}\left[2y(x) - 3y(x+h) + y(x+2h)\right] + y'(x)$$

Sviluppo:

$$\tau(x,h) = \frac{1}{h}\Big\{ \cancel{2y(x)} - 3\left[\cancel{y(x)} + y'(x)h + \frac{1}{2}y''(x)h^2 + O(h^3)\right] +$$

$$+ \left[\cancel{y(x)} + y'(x)2h + \frac{1}{2}y''(x)4h^2 + O(h^3)\right] + y'(x) =$$

$$= -3\cancel{y'(x)} - \frac{3}{2}y''(x)h + \cancel{y'(x)}\cdot 2 + 2y''(x)h + O(h^2)\ \cancel{+y'(x)} =$$

$$= \left(2 - \frac{3}{2}\right)y''(x)h + O(h^2) = \frac{1}{2}y''(x)h + O(h^2) = O(h)$$

Il metodo è consistente del 1° ordine.

⑥ Utilizzando il metodo di Eulero-Cauchy esplicito approssimare la soluzione dell'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'' + \frac{x}{3} y' - y = 2x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

in $x = \frac{1}{50}$ avendo posto il passo $h = \frac{1}{100}$.

Confrontare il risultato ottenuto con il valore della soluzione esatta $y(x) = \frac{1}{3}x^3$.

Soluzione:

Ponendo $y_1 = y$ e $y_2 = y'$ si ha:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\frac{x}{3} y_2 + y_1 + 2x \\ y_1(0) = y_2(0) = 0 \end{cases}$$

Quindi $\boxed{f_1(x, y_1, y_2) = y_2}$ e $\boxed{f_2(x, y_1, y_2) = y_1 - \frac{x}{3} y_2 + 2x}$

Al generico passo $i+1$ si ha:

$$\begin{cases} \eta_{1,i+1} = \eta_{1,i} + h f_1(x_i, \eta_{1,i}, \eta_{2,i}) \\ \eta_{2,i+1} = \eta_{2,i} + h f_2(x_i, \eta_{1,i}, \eta_{2,i}) \\ \eta_{1,0} = y_{01} \quad \eta_{2,0} = y_{02} \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{100} \\ \eta_{1,1} = \eta_{1,0} + h f_1(x_0, \eta_{1,0}, \eta_{2,0}) = 0 + \frac{1}{100} f_1(0,0,0) = 0 \\ \eta_{2,1} = \eta_{2,0} + h f_2(x_0, \eta_{1,0}, \eta_{2,0}) = 0 + \frac{1}{100} + f_2(0,0,0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + h = \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = \frac{1}{50} \\ \eta_{1,2} = \eta_{1,1} + \frac{1}{100} f_1(x_1, \eta_{1,1}, \eta_{2,1}) = 0 + \frac{1}{100} f_1(\frac{1}{100}, 0, 0) = 0 \\ \eta_{2,2} = \eta_{2,1} + \frac{1}{100} f_2(x_1, \eta_{1,1}, \eta_{2,1}) = 0 + \frac{1}{100} f_2(\frac{1}{100}, 0, 0) = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{50} = \frac{1}{5000} \end{cases}$$

Il valore della soluzione esatta nel pto $x=\frac{1}{50}$ è

$$y\left(\frac{1}{50}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{50}\right)^3=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{125000}=\frac{1}{375000}=0{,}000002667\simeq 3\cdot 10^{-6}$$

La soluzione approssimata è $\eta_{1,2}=0$ (bisogna considerare l'approssimazione di y_1 perché trasformando l'equazione in un sistema abbiamo posto $y_1=y$). che "approssima bene" fino alla 5ª cifra decimale.

(7) Dimostrare che per $a=\frac{3}{2}$ il metodo alle differenze

$$\eta_{k+2}=a\,\eta_{k+1}-\frac{1}{2}\eta_k+\frac{1}{2}h\,f(x_k,\eta_k)$$

è stabile e del 1º ordine.

Soluzione:

$$\eta_{k+2}-a\,\eta_{k+1}+\frac{1}{2}\eta_k=h\left[\frac{1}{2}f(x_k,\eta_k)\right]$$

$a_2=1 \quad a_1=-a=-\frac{3}{2} \quad a_0=\frac{1}{2} \qquad b_2=b_1=0 \quad b_0=\frac{1}{2}$

Stabilità:

$$p(w)=w^2-\frac{3}{2}w+\frac{1}{2}=0 \rightarrow 2w^2-3w+1=0$$

$$w_{1,2}=\frac{+3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\begin{cases}1\\ \frac{1}{2}\end{cases} \quad \text{stabile}$$

Consistenza:

$$\tau(x,h)=\frac{1}{h}\sum_{j=0}^{r}a_j\,y(x+jh)-\sum_{j=0}^{r}b_j\,y'(x+jh)=$$

$$=\frac{1}{h}\left[\frac{1}{2}y(x)-\frac{3}{2}y(x+h)+y(x+2h)\right]-\frac{1}{2}y'(x)$$

Sviluppo:

$$\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{2}\cancel{y(x)}-\frac{3}{2}\left[\cancel{y(x)}+y'(x)h+\frac{1}{2}y''(x)h^2+O(h^3)\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\cancel{y(x)}+y'(x)2h+\frac{1}{2}y''(x)4h^2+O(h^3)\right]\right\}-\frac{1}{2}y'(x)=$$

$$=-\frac{3}{2}\cancel{y'(x)}-\frac{3}{4}y''(x)h+\cancel{2y'(x)}+2y''(x)h+O(h^2)-\cancel{\frac{1}{2}y'(x)}$$

$$=\left(2-\frac{3}{4}\right)y''(x)h+O(h^2)=\frac{5}{4}y''(x)h+O(h^2)=O(h)$$

Il metodo è di ordine 1

(8) Dire se il seguente metodo multistep è stabile

$$\eta_{i+3}=\eta_{i+2}-\frac{1}{4}\eta_{i+1}+2h\,f(x_i,\eta_i)$$

Soluzione

$$\eta_{i+3}-\eta_{i+2}+\frac{1}{4}\eta_{i+1}=h\left[2f(x_i,\eta_i)\right]$$

$a_3=1 \quad a_2=-1 \quad a_1=\frac{1}{4} \quad a_0=0 \qquad b_2=b_1=0 \quad b_0=2$

$$\rho(\omega)=\omega^3-\omega^2+\frac{1}{4}\omega=0 \rightarrow \omega\left(\omega^2-\omega+\frac{1}{4}\right)=0$$

$$\omega_1=0$$

$$\omega_{2/3}=\frac{1\pm\sqrt{1-1}}{2}=\frac{1}{2}\ (\times 2) \qquad \underline{\text{stabile}}$$

(9) Dire se il seguente metodo multistep è stabile

$$\eta_{i+2}+\eta_i=5h\,f(x_i,\eta_i)$$

Soluzione:

$$\eta_{i+2}+\eta_i=h\left[5f(x_i,\eta_i)\right] \qquad \begin{aligned}a_2&=1\\ a_1&=0\\ a_0&=1\\ b_2&=b_1=0\\ b_0&=5\end{aligned}$$

$\rho(\omega)=\omega^2+1=0 \qquad \omega=\pm i$

$|i|=1$ $(\times 2)$ quindi ~~non~~ è stabile perché sono distinte