Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x - y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad x \in [0,10]$$

Dire se ammette una ed una sola soluzione e calcolare un'approssimazione della sua soluzione nel pto $x=1$ mediante un metodo alle differenze finite di ordine 2 con $x_0 = 0$ e $h = \frac{1}{2}$

Soluzione:

$f(x,y) = x - y$ continua

$\frac{\partial f}{\partial y} = -1$ che è limitata
qnd ammette $\exists$za e unicità globale

Metodo di Heun:

$$\eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i,\eta_i) + f(x_{i+1}, \eta_i + h f(x_i,\eta_i))\right]$$

$x_0 = 0 \quad \eta_0 = y_0 = 1$

$x_1 = \frac{1}{2}$

$$\eta_1 = \eta_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0,\eta_0) + f\left(x_1, \eta_0 + \frac{1}{2} f(x_0,\eta_0)\right)\right] =$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\left[\underbrace{f(0,1)} + f\left(\frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\underbrace{f(0,1)}\right)\right] =$$

$$\boxed{f(0,1) = 0 - 1 = -1}$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\left[-1 + f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right] = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0}$$

$x_2 = 1$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\left[f(x_1, y_1) + f\left(x_2, y_1 + h f(x_1, y_1)\right)\right] =$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\left[f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) + f\left(1, \frac{3}{4} + \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)\right)\right] =$$

$$\boxed{f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{4} + f\left(1, \frac{5}{8}\right)\right] = \qquad \boxed{f\left(1, \frac{5}{8}\right) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{8} = \frac{3}{4} + \frac{1}{32} = \frac{25}{32}$$

Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -8x^2 y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}$$

dire se è ben posto e approssimare la soluzione nel pto di ascissa $x = \frac{3}{2}$ mediante la formula di Eulero modificata utilizzando il passo $h = \frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$f(x,y) = -8x^2 y$ continua

$\frac{\partial f}{\partial y} = -8x^2$ che non è limitata per $x \in \mathbb{R}$

la soluzione ammette esistenza e unicità locale

metodo di Eulero modificato:

$$\eta_{i+1} = \eta_i + h f\left(x_i + \frac{h}{2}, \eta_i + \frac{h}{2} f(x_i, \eta_i)\right)$$

$\eta_0 = y_0$

$x_0 = 0 \qquad \eta_0 = 1$

$x_1 = 1/2$

$$\eta_1 = \eta_0 + h f\left(x_0 + \frac{h}{2}, \eta_0 + \frac{h}{2} f(x_0, \eta_0)\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} f\left(0 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4} \underbrace{f(0,1)}_{-8\cdot(0)^2\cdot(1) = 0}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \underbrace{f\left(\frac{1}{4}, 1\right)}_{-8\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot(1) = -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$x_2 = 1$

$$\eta_2 = \eta_1 + h f\left(x_1 + \frac{h}{2}, \eta_1 + \frac{h}{2} f(x_1, \eta_1)\right) =$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \underbrace{f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)}_{-8\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{4} = -\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} f\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4} - \frac{3}{8}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \underbrace{f\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{8}\right)}_{-8\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{8} = -\frac{9}{2}\cdot\frac{3}{8} = -\frac{27}{16}} = \frac{3}{4} - \frac{27}{32} = -\frac{3}{32}$$

$x_3 = \frac{3}{2}$

$$\eta_3 = \eta_2 + h f\left(x_2 + \frac{h}{2}, \eta_2 + \frac{h}{2} f(x_2, \eta_2)\right) =$$

$$= -\frac{3}{32} + \frac{1}{2} f\left(1 + \frac{1}{4}, -\frac{3}{32} + \frac{1}{4} \underbrace{f\left(1, -\frac{3}{32}\right)}_{-8(1)^2\left(-\frac{3}{32}\right) = \frac{3}{4}}\right) =$$

$$= -\frac{3}{32} + \frac{1}{2} f\left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{32} + \frac{3}{16}\right) = -\frac{3}{32} + \frac{1}{2} \underbrace{f\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{32}\right)}_{-8\left(\frac{5}{4}\right)^2\left(\frac{3}{32}\right) = -\cancel{8}\frac{25}{\cancel{16}_{2}} \cdot \frac{3}{32} = \frac{75}{64}} =$$

$$= -\frac{3}{32} + \frac{75}{128} = \frac{-12+75}{128} = \frac{63}{128}$$

Trasformare il problema del 2° ordine

$$\begin{cases} y''(x) = -y + 4y' \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

in un sistema del primo ordine e calcolare i primi due passi del metodo di Eulero con $h = \frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$y_1 = y \qquad y_2 = y'$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 + 4y_2 \\ y_1(0) = 1 \quad y_2(0) = 0 \end{cases}$$

$f_1 = y_2$
$f_2 = -y_1 + 4y_2$

metodo di Eulero "semplice":

$$\boxed{\eta_{i+1} = \eta_i + h f(x_i, \eta_i)}$$

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) \\ y_1(x_0) = a \quad y_2(x_0) = b \end{cases}$$

Per i sistemi:

$$\begin{cases} \eta_{1,i+1} = \eta_{1,i} + h f_1(x_i, \eta_{1,i}, \eta_{2,i}) \\ \eta_{2,i+1} = \eta_{2,i} + h f_2(x_i, \eta_{1,i}, \eta_{2,i}) \\ \eta_{1,0} = 1 \qquad \eta_{2,0} = 0 \end{cases}$$

$h = \frac{1}{2} \quad x_0 = 0$

$x_1 = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \eta_{1,1} = \eta_{1,0} + h f_1(x_0, \eta_{1,0}, \eta_{2,0}) \\ \eta_{2,1} = \eta_{2,0} + h f_2(x_0, \eta_{1,0}, \eta_{2,0}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \eta_{1,1} = 1 + \frac{1}{2} f_1(0,1,0) = 1 \\ \eta_{2,1} = 0 + \frac{1}{2} f_2(0,1,0) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \eta_{1,2} = \eta_{1,1} + h\, f_1(x_1, \eta_{1,1}, \eta_{2,1}) = 1 + \frac{1}{2} f_1\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ \eta_{2,2} = \eta_{2,1} + h\, f_2(x_1, \eta_{1,1}, \eta_{2,1}) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_2\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2 \end{cases}$$

$$f_2\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) = -1 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -3$$

Dire per quali valori del parametro reale a la seguente formula alle differenze finite risulta convergente e per quali assume ordine 2:

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{3}\left[5 f(x_i, \eta_i) - 2 f(x_i + 2ah, \eta_i + 2ah\, f(x_i, \eta_i))\right] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

Soluzione:

La formula è monostep ed esplicita e quindi è della forma $\eta_{i+1} = \eta_i + h\phi(x_i, \eta_i)$.

Individuiamo la funzione $\phi(x,y)$:

$$\phi(x,y) = \frac{1}{3}\left(5 f(x,y) - 2 f(x + 2ah, y + 2ah f(x,y))\right)$$

Dato che la formula è monostep, il metodo è stabile. Basta quindi studiare la consistenza.
Per fare questo sviluppiamo in serie di Taylor l'ERRORE LOCALE DI DISCRETIZZAZIONE:

$$\tau(x,h) = \Delta(x,y) - \phi(x,y) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \phi(x,y)$$

Si ha:

$$\Delta(x,y) = f(x,y) + \frac{1}{2}\left(f_x(x,y) + f_y(x,y)\cdot f(x,y)\right)h + O(h^2)$$

$$\phi(x,y) = \frac{1}{3}\left[5 f(x,y) - 2 f(x,y)\right] + \frac{1}{3}\left[0 - 2\left(f_x(x,y)\cdot 2a + f_y(x,y)\cdot 2a f(x,y)\right)\right]\cdot h + O(h^2)$$

Quindi: $\tau(x,h) = \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}a\right)\left(f_x + f_y \cdot f\right)\cdot h + O(h^2)$

È convergente perché manca il termine costante.
È del secondo ordine se si annulla il termine in h

cioè se $\frac{1}{2} - \frac{4}{3}a = 0 \rightarrow a = \frac{3}{8}$

Dire per quali valori del parametro reale β la seguente formula alle differenze finite risulta convergente e per quali assume ordine 2:

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{4}\left[f(x_i,\eta_i) + 3f(x_i+\beta h, \eta_i + \beta h f(x_i,\eta_i))\right] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

Soluzione: La formula è monostep esplicita quindi è stabile. Basta controllare la consistenza:

$$\phi(x,y) = \frac{1}{4}\left[f(x,y) + 3f(x+\beta h, y+\beta h f(x,y))\right]$$

$\tau(x,h) = \Delta(x,y) - \phi(x,y)$ i cui sviluppi sono:

$$\Delta(x,y) = f(x,y) + \frac{1}{2}\left(f_x(x,y) + f_y(x,y)\cdot f(x,y)\right)\cdot h + O(h^2)$$

$$\phi(x,y) = \frac{1}{4}\left[f(x,y) + 3f(x,y)\right] + \frac{1}{4}\left[0 + 3\left(f_x(x,y)\cdot\beta + f_y(x,y)\cdot\beta f(x,y)\right]h + O(h^2)$$

Quindi: $\tau(x,h) = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\beta\right)\left(f_x + f_y\cdot f\right)\cdot h + O(h^2)$

Il metodo è convergente perchè manca il termine costante.

È del secondo ordine se si annulla il termine in h, cioè se

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\beta = 0 \rightarrow \beta = \frac{2}{3}$$

Classificare la seguente formula alle differenze finite e dire per quali valori dei parametri reali α, β è convergente e per quali è del 2° ordine:

$$\begin{cases} m_{i+1} = m_i + h\left[\alpha f(x_i, m_i) + 3\alpha f\left(x_i + \frac{\beta}{3}h, m_i + \frac{\beta}{3}h f(x_i, m_i)\right)\right] \\ m_0 = y_0 \end{cases}$$

Soluzione:

La formula è monostep, esplicita e a due stadi.
Essendo monostep è stabile quindi basta controllare la consistenza:

$$\phi(x,y) = \alpha\left[f(x,y) + 3f\left(x + \frac{\beta}{3}h, y + \frac{\beta}{3}h f(x,y)\right)\right]$$

$\tau(x,h) = \Delta(x,y) - \phi(x,y)$ i cui sviluppi sono:

$$\Delta(x,y) = f(x,y) + \frac{1}{2}\left[f_x(x,y) + f_y(x,y) f(x,y)\right] \cdot h + O(h^2)$$

$$\phi(x,y) = \alpha\left\{\left[f(x,y) + 3f(x,y)\right] + \right.$$
$$\left. + \left[0 + 3\left(f_x(x,y) \cdot \frac{\beta}{3} + f_y(x,y) \cdot \frac{\beta}{3} f(x,y)\right)\right]h\right\} + O(h^2) =$$
$$= \alpha\left[4f(x,y) + \beta(f_x + f_y \cdot f) \cdot h\right] + O(h^2).$$

Il metodo è convergente se si annulla il termine costante, cioè se

$$1 - 4\alpha = 0 \rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$$

ed è del 2° ordine se si annulla il termine in h cioè se

$$\frac{1}{2} - \alpha\beta = 0$$

ma sappiamo che $\alpha = \frac{1}{4}$ (altrimenti non converge) quindi

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\beta = 0 \rightarrow \beta = 2$$

Classificare la seguente formula e dire se il suo ordine di convergenza è almeno 2:

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{3}\left[2f(x_i,\eta_i) - f\left(x_i+\frac{h}{2}, \eta_i + \frac{h}{2} f(x_i,\eta_i)\right) + 2f(x_i+h, \eta_i + hf(x_i,\eta_i))\right] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

<u>Soluzione:</u> la formula è monostep, esplicita a <u>3 stadi</u>.

Essendo monostep basta controllare la consistenza:

$$\phi(x,y) = \frac{1}{3}\left[2f(x,y) - f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2} f(x,y)\right) + 2f(x+h, y+hf(x,y))\right]$$

$\tau(x,h) = \Delta(x,y) - \phi(x,y)$ i cui sviluppi sono

$$\Delta(x,y) = f(x,y) + \frac{1}{2}\left[f_x(x,y) + f_y(x,y) f(x,y)\right] \cdot h + o(h^2)$$

$$\phi(x,y) = \frac{1}{3}\Big\{2 f(x,y) - f(x,y) + 2f(x,y) +$$

$$+ \left[0 - \left(f_x(x,y)\cdot\frac{1}{2} + f_y(x,y)\frac{1}{2}f(x,y)\right) + 2\left(f_x(x,y) + f_y(x,y) f(x,y)\right)\right] \cdot h\Big\} +$$

$$+ o(h^2) = f(x,y) + \frac{1}{2}\left[f_x + f_y \cdot f\right] \cdot h + o(h^2)$$

Quindi: $\tau(x,h) = o(h^2)$

mancando sia il termine costante che quello di 1° grado la formula è convergente e di ordine 2.