① Calcolare il numero di condizione, rispetto alle norme con indice $1,2,\infty$ della matrice

$$A=\begin{bmatrix}5 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \beta\end{bmatrix}$$

<u>Soluzione:</u> Per calcolare il numero di condizionamento della matrice A bisogna prima calcolare la sua norma in base alle formule

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \begin{cases}\sqrt{\varrho(A^TA)} & \text{in generale}\\ \varrho(A) & \text{se } A \text{ è simmetrica}\end{cases}$$

In questo caso A è simmetrica, quindi:

$$\|A\|_1 = \|A\|_\infty \quad \text{e} \quad \|A\|_2 = \varrho(A)$$

Si ha:

$$A=\begin{bmatrix}5 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \beta\end{bmatrix}\begin{matrix}\to 7\\ \to 3\\ \to |\beta|\end{matrix}$$

Perciò: $\|A\|_1 = \|A\|_\infty = \begin{cases}7 & \text{se } |\beta|\leq 7\\ |\beta| & \text{se } |\beta|>7\end{cases}$

Calcoliamo gli autovalori di A:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}5-\lambda & 2 & 0\\ 2 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & \beta-\lambda\end{vmatrix}=(\beta-\lambda)\left[(5-\lambda)(1-\lambda)-4\right]=$$

$$=(\beta-\lambda)(5-5\lambda-\lambda+\lambda^2+4)=$$

$= (\beta-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+1)=0$

$\beta-\lambda=0 \rightarrow \lambda=\beta$

$\lambda^2-6\lambda+1=0 \rightarrow \lambda_{1/2}=\dfrac{6\pm\sqrt{36-4}}{2}=\dfrac{6\pm4\sqrt{2}}{2}= \begin{cases} 3+2\sqrt{2} \\ 3-2\sqrt{2} \end{cases}$

Quindi lo spettro di A è: $\sigma(A)=\{\beta, 3\pm2\sqrt{2}\}$.
e il suo raggio spettrale è

$$\rho(A)=\begin{cases} |\beta| & \text{se } |\beta|>3+2\sqrt{2} \\ 3+2\sqrt{2} & \text{se } |\beta|\leq 3+2\sqrt{2} \end{cases}$$

Infatti $\rho(A)=\max\limits_{k=1,\dots,n}|\lambda_k| = \max\{|3-2\sqrt{2}|, |3+2\sqrt{2}|, |\beta|\}$.

Quindi $\|A\|_2=\begin{cases} |\beta| & \text{se } |\beta|>3+2\sqrt{2} \\ 3+2\sqrt{2} & \text{se } |\beta|\leq 3+2\sqrt{2} \end{cases}$.

Per calcolare il numero di condizionamento della matrice A utilizziamo le formule:

$$K(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$$

$$K_2(A)=\frac{|\lambda_{max}(A)|}{|\lambda_{min}(A)|}$$ (infatti la matrice è simmetrica).

Abbiamo i seguenti casi:

1. $\lambda_1=\beta$, $\lambda_2=3-2\sqrt{2}$ $\lambda_3=3+2\sqrt{2}$ se $|\beta|<3-2\sqrt{2}$
2. $\lambda_1=3-2\sqrt{2}$, $\lambda_2=\beta$, $\lambda_3=3+2\sqrt{2}$ se $3-2\sqrt{2}<\beta<3+2\sqrt{2}$
3. $\lambda_1=3-2\sqrt{2}$, $\lambda_2=3+2\sqrt{2}$, $\lambda_3=\beta$ se $|\beta|>3+2\sqrt{2}$

Quindi:

$$K_2(A)=\begin{cases} \dfrac{3+2\sqrt{2}}{|\beta|} & \text{se } |\beta|<3-2\sqrt{2} \text{ e } \beta\neq 0 \\ \dfrac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} & \text{se } 3-2\sqrt{2}<|\beta|<3+2\sqrt{2} \\ \dfrac{|\beta|}{|3-2\sqrt{2}|} & \text{se } |\beta|>3+2\sqrt{2} \end{cases}$$

Per calcolare $K_1(A)$ e $K_\infty(A)$ abbiamo bisogno di A^{-1}, che calcoliamo risolvendo i 3 sistemi lineari

$$Ax = e_i \qquad i = 1,2,3$$

ognuno dei quali ha come soluzione una colonna di A^{-1}.

1° sistema:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ \beta x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{c} \\ \frac{2}{5} \\ 0 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{array}\right]$$

Quindi abbiamo:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 1 & \rightarrow 5x_1 + 2(-2) = 1 \rightarrow 5x_1 = 5 \rightarrow x_1 = 1 \\ \frac{1}{5}x_2 = -\frac{2}{5} & \rightarrow x_2 = -\frac{2}{5} \cdot 5 = -2 \\ \beta x_3 = 0 & \rightarrow x_3 = 0 \end{cases}$$

2° sistema:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ \beta x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{c} \\ \frac{2}{5} \\ 0 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{array}\right]$$

Quindi abbiamo

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 0 & \rightarrow 5x_1 + 2(5) = 0 \rightarrow 5x_1 = -10 \rightarrow x_1 = -2 \\ \frac{1}{5}x_2 = 1 & \rightarrow x_2 = 5 \\ \beta x_3 = 0 & \rightarrow x_3 = 0 \end{cases}$$

Terzo sistema:

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2 & =0 \\ 2x_1+x_2 & =0 \\ \beta x_3=1 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{c} \\ \frac{2}{5} \\ 0 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \end{array}\right]$$

Quindi:

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2 =0 & \rightarrow x_1=0 \\ \frac{1}{5}x_2 =0 & \rightarrow x_2=0 \\ \beta x_3=1 & \rightarrow x_3=1/\beta \end{cases}$$

L'inversa di A è:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\beta \end{bmatrix}$$

Si ha:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\beta \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow 3 \\ \rightarrow 7 \\ \rightarrow 1/|\beta| \end{array}$$

Perciò:

$$\|A^{-1}\|_1=\|A^{-1}\|_\infty=\begin{cases} 7 & \text{se } \frac{1}{|\beta|}<7 \rightarrow |\beta|>\frac{1}{7} \\ \frac{1}{|\beta|} & \text{se } \frac{1}{|\beta|}\geq 7 \rightarrow |\beta|<\frac{1}{7} \end{cases}$$

Quindi:

$$K_1(A)=K_\infty(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|=\begin{cases} \frac{7}{|\beta|} & \text{se } |\beta|<\frac{1}{7} \\ 49 & \text{se } \frac{1}{7}<|\beta|<7 \\ 7\cdot|\beta| & \text{se } |\beta|>7 \end{cases}$$

② Risolvere mediante la fattorizzazione $PA=LU$

il sistema lineare

$$\begin{cases} 4x_2-2x_3+2x_4=-2 \\ 2x_1+x_2+\qquad 4x_4=8 \\ 4x_1-2x_2+2x_3-2x_4=2 \\ 2x_1-x_2+5x_3-3x_4=-7 \end{cases}$$

e calcolare il determinante della matrice dei coefficienti.

<u>Soluzione</u>: Per trovare la fattorizzazione $PA=LU$ dobbiamo applicare l'algoritmo di Gauss con pivoting di colonna

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 5 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{array} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{array} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ 0 \end{array} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Quindi la matrice triangolare superiore U è:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = U$$

Per costruire la matrice L dobbiamo tener conto delle operazioni effettuate su A:

scambio riga 1 e riga 3

$\downarrow$

$m_{21}=\frac{1}{2}$, $m_{31}=0$, $m_{41}=\frac{1}{2}$

$\downarrow$

scambio riga 2 e riga 3

$\downarrow$

$m_{32}=\frac{1}{2}$, $m_{42}=0$

$\downarrow$

scambio riga 3 e riga 4

$\downarrow$

$m_{43}=0$

$$L=\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} \to L=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L$$

Per trovare P effettuiamo sulla matrice identità I_4 gli stessi scambi effettuati su A:

$$I_4=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{P^{(1,3)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{P^{(2,3)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{P^{(3,4)}}$$

$$\to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P$$

Data la fattorizzazione $PA = LU$, un sistema $Ax = b$ si risolve risolvendo i due sistemi lineari

$$\begin{cases} Ly = Pb \\ Ux = y \end{cases}$$

$$b = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{P(1,3)} \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{P(2,3)} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 8 \\ -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{P(3,4)} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -7 \\ 8 \end{bmatrix} = Pb$$

Quindi:

$$Ly = Pb \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -7 \\ 8 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 & \rightarrow y_1 = 2 \\ y_2 = -2 & \rightarrow y_2 = -2 \\ \frac{1}{2}y_1 + y_3 = -7 & \rightarrow \frac{1}{2}\cdot 2 + y_3 = -7 \rightarrow y_3 = -7-1 = -8 \\ \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + y_4 = 8 & \rightarrow \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}(-2) + y_4 = 8 \rightarrow y_4 = 8 \end{cases}$$

Questa soluzione diventa il termine noto del sistema

$$Ux = y \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -8 \\ 8 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 & \rightarrow 4x_1 = 2+2+4-4 = 4 \rightarrow x_1 = 1 \\ 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -2 & \rightarrow 4x_2 = -2-2-4 = -8 \rightarrow x_2 = -2 \\ 4x_3 - 2x_4 = -8 & \rightarrow 4x_3 = -8+4 = -4 \rightarrow x_3 = -1 \\ 4x_4 = 8 & \rightarrow x_4 = 2 \end{cases}$$

La soluzione del sistema lineare è quindi

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare il determinante di A utilizziamo la formula:

$$\det(A) = (-1)^{\#\text{scambi}} \prod_{i=1}^{n} u_{ii} = (-1)^3 [4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4] = -256.$$

③ Assegnati

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 2 & 0 \\ \beta & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Dire per quali valori del parametro reale β A è invertibile, per quali risulta definita positiva e per quali valori il metodo di Jacobi risulta convergente se applicato al sistema $Ax=b$. Posto $\beta=1$ calcolare le prime due iterazioni del metodo di Jacobi utilizzando il vettore iniziale $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

<u>Soluzione</u>:

Per determinare quando A è invertibile bisogna calcolare il determinante e imporre che sia diverso da zero.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 2 & 0 \\ \beta & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (6) + \beta(-2\beta) = 6 - 2\beta^2 \neq 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \beta^2 \neq 3 \rightarrow \beta \neq \pm\sqrt{3}$$

La matrice A è definita positiva se tutti i suoi autovalori sono maggiori di zero:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & \beta \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ \beta & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(2-\lambda)(3-\lambda)\right] + \beta\left[-\beta(2-\lambda)\right] =$$

$$\cancel{=(1-\lambda)\left[6-3\lambda-2\lambda+\lambda^2\right]-2\beta^2+\lambda\beta^2}$$

$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)(3-\lambda)-\beta^2\right] = (2-\lambda)(3-\lambda-3\lambda+\lambda^2-\beta^2) = 0$$

$$(2-\lambda) = 0 \rightarrow \lambda = 2$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 - \beta^2 = 0 \quad \rightarrow \lambda_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4(3-\beta^2)}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{4+4\beta^2}}{2} = 2 \pm \sqrt{1+\beta^2}$$

$$\sigma(A) = \{2, 2 \pm \sqrt{1+\beta^2}\}$$

Gli autovalori 2 e $2+\sqrt{1+\beta^2}$ sono sempre maggiori di zero, bisogna controllare quando

$$2-\sqrt{1+\beta^2} > 0$$

cioè quando $\sqrt{1+\beta^2} < 2 \rightarrow 1+\beta^2 < 4 \rightarrow \beta^2 < 3 \rightarrow |\beta| < \sqrt{3}$

cioè $\quad -\sqrt{3} < \beta < \sqrt{3}$

Per verificare se il metodo di Jacobi converge individuiamo le matrici D, L, U:

$$D = \mathrm{diag}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il metodo di Jacobi è convergente se e solo se $\rho(B_J) < 1$ dove $B_J = D^{-1}(L+U)$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

infatti D è diagonale e la sua inversa è una matrice diagonale che ha come elementi gli inversi degli elementi di D.

$$B_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo gli autovalori:

$$\det(B_J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \beta \\ 0 & -\lambda & 0 \\ \frac{\beta}{3} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left[\lambda^2 - \frac{1}{3}\beta^2\right] = 0$$

$-\lambda = 0 \to \lambda = 0$

$\lambda^2 - \frac{1}{3}\beta^2 = 0 \to \lambda^2 = \frac{1}{3}\beta^2 \to \lambda = \pm\beta\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sigma(B_J) = \left\{0, \pm\beta\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ Deve essere: $\beta\frac{\sqrt{3}}{3} < 1 \to \beta < \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

e $-\beta\frac{\sqrt{3}}{3} < 1 \to -\beta < \sqrt{3} \to \beta > -\sqrt{3}$, cioè $-\sqrt{3} < \beta < \sqrt{3}$.

Poniamo $\beta=1$ e calcoliamo $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$.

In generale si ha:

$$x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + f_J \quad \text{con} \quad B_J = D^{-1}(L+U) \text{ e } f_J = D^{-1} \cdot b.$$

Quindi $f_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7/3 \end{bmatrix}$

$$x^{(1)} = B_J x^{(0)} + f_J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7/3 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = B_J x^{(1)} + f_J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16/3 \\ 2 \\ 10/3 \end{bmatrix}$$

4. Dire se il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{2y}{x-2} \\ y(0) = 1 \quad , \quad x \in [0,5] \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione. Calcolare, inoltre, i primi due passi del metodo alle differenze finite di Heun, con passo $h=\frac{1}{2}$.

Soluzione: $f(x,y) = -\dfrac{2y}{x-2} \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{2}{x-2}$

f non è continua nell'intervallo $[0,5]$. Infatti quando $x=2$ il denominatore si annulla. La derivata inoltre non è continua in $x=2$. La soluzione perciò esiste localmente.

Metodo di Heun:

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i,\eta_i) + f(x_{i+1}, \eta_i + h f(x_i,\eta_i))\right] \\ \eta_0 = y_0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \eta_0 = 1 \end{cases} \qquad h = \frac{1}{2} \qquad f(x,y) = -\frac{2y}{x-2}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ \eta_1 = \eta_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0,\eta_0) + f(x_1, \eta_0 + h f(x_0,\eta_0))\right] = \end{cases}$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\left[f(0,1) + f\left(\frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\underbrace{f(0,1)}_{= -\frac{2(1)}{0-2} = 1}\right)\right] =$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\left[1 + f\left(\frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\left[1 + \underbrace{f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)}_{= -\frac{2\cdot\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}-2} = -\frac{3}{-\frac{3}{2}} = 2}\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{4}[1+2] = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\begin{cases} x_2 = 1 \\ \eta_2 = \eta_1 + \frac{h}{2}\left[f(x_1,\eta_1) + f(x_2, \eta_1 + h f(x_1,\eta_1))\right] = \end{cases}$$

$$= \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\left[f\left(\frac{1}{2},\frac{7}{4}\right) + f\left(1, \frac{7}{4} + \frac{1}{2}\underbrace{f\left(\frac{1}{2},\frac{7}{4}\right)}_{= \frac{-2\frac{7}{4}}{\frac{1}{2}-2} = \frac{-\frac{7}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{7}{3}}\right)\right] =$$

$$= \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\left[\frac{7}{3} + f\left(1, \frac{7}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{3}\right)\right] = \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\left[\frac{7}{3} + \underbrace{f\left(1, \frac{35}{12}\right)}_{= \frac{-2\cdot 35/12}{1-2} = \frac{35}{6}}\right] =$$

$$= \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{7}{3} + \frac{35}{6}\right) = \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{49}{6} = \frac{7}{4} + \frac{49}{24} = \frac{91}{24}$$