① Determinare per quali valori del parametro a la seguente formula alle differenze finite

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{3}\left[a f(x_i,\eta_i) - (a-3) f(x_i+ah, \eta_i + ah f(x_i,\eta_i))\right] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

risulta convergente e per quali assume ordine 2.

<u>Soluzione</u>: la formula è monostep, esplicita a 2 stadi. Essendo monostep <u>è stabile</u> quindi basta controllare la consistenza:

$$\phi(x,y) = \frac{1}{3}\left[a f(x,y) - (a-3) f(x+ah, y+ah f(x,y))\right]$$

$\tau(x,h) = \Delta(x,y) - \phi(x,y)$ i cui sviluppi sono:

$$\Delta(x,y) = f(x,y) + \frac{1}{2}\left(f_x(x,y) + f_y(x,y) f(x,y)\right] \cdot h + O(h^2)$$

$$\phi(x,y) = \frac{1}{3}\Big\{ a f(x,y) - (a-3) f(x,y) +$$

$$+ \left[0 - (a-3)\left(f_x(x,y)\cdot a + f_y(x,y)\cdot a f(x,y)\right)\right]\cdot h \Big\} + O(h^2) =$$

$$= f(x,y) - (a-3)\frac{a}{3}\left(f_x + f_y \cdot f\right)\cdot h + O(h^2)$$

$$\tau(x,h) = \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{3}(a-3)\right)\left(f_x + f_y \cdot f\right)\cdot h + O(h^2)$$

Il metodo è convergente perché non compare il termine costante. È del 2° ordine se si annulla il termine di 1° grado, cioè se

$$\frac{1}{2} + \frac{a}{3}(a-3) = 0 \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{a^2}{3} - a = 0 \rightarrow 2a^2 - 6a + 3 = 0$$

$$a_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-24}}{4} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{4} \rightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \rightarrow \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

② Determinare per quali valori del parametro a la seguente formula alle differenze finite

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + h\left[a f(x_i, \eta_i) + (1-a) f\left(x_i + \frac{h}{2}, \eta_i + \frac{h}{2} f(x_i, \eta_i)\right)\right] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

è convergente e per quali risulta del 2° ordine.

Soluzione: la formula è monostep, esplicita, a 2 stadi. È quindi stabile. Controlliamo la consistenza:

$$\phi(x,y) = a f(x,y) + (1-a) f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x,y)\right)$$

$$\tau(x,h) = \Delta(x,y) - \phi(x,y)$$ i cui sviluppi sono:

$$\Delta(x,y) = f(x,y) + \frac{1}{2}\left(f_x(x,y) + f_y(x,y) f(x,y)\right) \cdot h + O(h^2)$$

$$\phi(x,y) = \left[a f(x,y) + (1-a) f(x,y)\right] +$$

$$+ \left[0 + (1-a)\left(f_x(x,y) \cdot \frac{1}{2} + f_y(x,y) \cdot \frac{1}{2} f(x,y)\right)\right] \cdot h + O(h^2) =$$

$$= f(x,y) + \frac{1}{2}(1-a)(f_x + f_y \cdot f) \cdot h + O(h^2)$$

$$\tau(x,h) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-a)\right)(f_x + f_y \cdot f) \cdot h + O(h^2)$$

Il metodo è convergente perché manca il termine costante. È del 2° ordine se

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-a) = 0 \rightarrow \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a = 0 \rightarrow a = 0.$$

③ Determinare per quali valori dei parametri a, β le seguenti formule alle differenze finite sono convergenti e per quali assumono ordine 2:

ⓐ $\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{a}\left[f(x_i, \eta_i) + f\left(x_i + \frac{\beta}{2}h, \eta_i + \frac{\beta}{2}h\, f(x_i, \eta_i)\right)\right] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$

ⓑ $\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{4}\left[f(x_i, \eta_i) + 2f\left(x_i + \frac{1}{\beta}h, \eta_i + \frac{1}{\beta}h\, f(x_i, \eta_i)\right)\right] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$

ⓒ $\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{3}{2}h\left[4f(x_i, \eta_i) - 2f\left(x_i + \frac{\beta}{3}h, \eta_i + \frac{\beta}{3}h\, f(x_i, \eta_i)\right)\right] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$

Soluzione:

ⓐ La formula è monostep, esplicita a 2 stadi. È quindi stabile, perciò basta controllare la consistenza:

$$\phi(x, y) = \frac{1}{a}\left[f(x, y) + f\left(x + \frac{\beta}{2}h, y + \frac{\beta}{2}h\, f(x, y)\right)\right]$$

$\tau(x, h) = \Delta(x, y) - \phi(x, y)$ che sviluppati:

$$\Delta(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{2}\left(f_x(x, y) + f_y(x, y)\cdot f(x, y)\right)\cdot h + O(h^2)$$

$$\phi(x, y) = \frac{1}{a}\Big\{f(x, y) + f(x, y) +$$
$$+ \left[0 + f_x(x, y)\frac{\beta}{2} + f_y(x, y)\cdot\frac{\beta}{2} f(x, y)\right]\cdot h\Big\} + O(h^2)$$
$$= \frac{2}{a} f(x, y) + \frac{\beta}{2a}(f_x + f_y \cdot f)\cdot h + O(h^2)$$

Il metodo è convergente se si annulla il termine costante, cioè se

$$1 - \frac{2}{a} = 0 \to a = 2$$

È del 2° ordine se si annulla il termine di 1° grado:

$$\frac{1}{2} - \frac{\beta}{2a} = 0 \xrightarrow{a=2} \frac{1}{2} - \frac{\beta}{4} = 0 \to \frac{\beta}{4} = \frac{1}{2} \to \beta = 2$$

ⓑ Il metodo è monostep, esplicito, a 2 stadi.
Controlliamo la consistenza:

$$\phi(x,y) = \frac{1}{4}\left[f(x,y) + a f\left(x + \frac{1}{\beta}h, y + \frac{1}{\beta}h f(x,y)\right)\right]$$

$$\tau(x,h) = \Delta(x,y) - \phi(x,y)$$

$$\Delta(x,y) = f(x,y) + \frac{1}{2}\left(f_x(x,y) + f_y(x,y)\cdot f(x,y)\right)\cdot h + O(h^2)$$

$$\phi(x,y) = \frac{1}{4}\Big\{f(x,y) + a f(x,y) +$$

$$+ \left[0 + a\left(f_x(x,y)\cdot\frac{1}{\beta} + f_y(x,y)\frac{1}{\beta}f(x,y)\right)\right]\cdot h\Big\} + O(h^2) =$$

$$= \frac{1}{4}(1+a) f(x,y) + \left(\frac{1}{4}\frac{a}{\beta}\right)(f_x + f_y \cdot f)\cdot h + O(h^2)$$

Il metodo è convergente se si annulla il termine costante, cioè se

$$1 - \frac{1}{4}(1+a) = 0 \to 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a = 0 \to \frac{3}{4} - \frac{1}{4}a = 0$$

$$\to \frac{3}{4} = \frac{1}{4}a \to a = 3$$

È del 2° ordine se si annulla (anche) il termine di 1° grado:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{a}{\beta} = 0 \xrightarrow{a=3} \frac{1}{2} - \frac{3}{4\beta} = 0 \to \frac{3}{4\beta} = \frac{1}{2} \to 4\beta = 6 \to \beta = \frac{3}{2}$$

© la formula è monostep, esplicita, a 2 stadi. Essendo stabile controlliamo la consistenza:

$$\phi(x,y) = \frac{3}{2}\left[4f(x,y) - \alpha f\left(x+\frac{\beta}{3}h, y+\frac{\beta}{3}h f(x,y)\right)\right]$$

$$\tau(x,h) = \Delta(x,y) - \phi(x,y)$$

Sviluppi:

$$\Delta(x,y) = f(x,y) + \frac{1}{2}\left(f_x(x,y) + f_y(x,y)\cdot f(x,y)\right)\cdot h + O(h^2)$$

$$\phi(x,y) = \frac{3}{2}\Big\{4f(x,y) - \alpha f(x,y) +$$

$$+\left[0 - \alpha\left(f_x(x,y)\cdot\frac{\beta}{3} + f_y(x,y)\cdot\frac{\beta}{3}f(x,y)\right)\cdot h\right\} + O(h^2) =$$

$$= \frac{3}{2}(4-\alpha)f(x,y) - \frac{1}{2}\alpha\beta\left(f_x + f_y\cdot f\right)h + O(h^2)$$

$$\tau(x,h) = \left(1 - \frac{3}{2}(4-\alpha)\right)f + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha\beta\right)\left(f_x + f_y\cdot f\right)h + O(h^2)$$

Il metodo è ~~del~~ convergente se

$$1 - \frac{3}{2}(4-\alpha) = 0 \rightarrow 1 - 6 + \frac{3}{2}\alpha = 0 \rightarrow \alpha = \frac{10}{3}$$

È del 2° ordine se:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha\beta = 0 \xrightarrow{\alpha=\frac{10}{3}} \frac{1}{2} + \frac{5}{3}\beta = 0 \rightarrow \frac{5}{3}\beta = -\frac{1}{2} \rightarrow \beta = -\frac{3}{10}$$

(4) Stabilire se le seguenti formule multistep sono stabili

(a) $\eta_{k+2} = \frac{1}{2}\eta_{k+1} - 2\eta_k + 2hf(x_k, \eta_k)$

(b) $\eta_{k+2} = -2\eta_{k+1} + 4\eta_k + hf(x_k, \eta_k)$

Soluzione:

(a) Riscriviamo la formula portando le "eta" da una parte:

$$\eta_{k+2} - \frac{1}{2}\eta_{k+1} + 2\eta_k = h[2f(x_k, \eta_k)]$$

$a_2 = 1 \quad a_1 = -\frac{1}{2} \quad a_0 = 2$

$$p(\omega) = \omega^2 - \frac{1}{2}\omega + 2 = 0 \rightarrow 2\omega^2 - \omega + 4 = 0$$

$$\omega_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-32}}{4} = \frac{1 \pm i\sqrt{31}}{4}$$

Sono due numeri complessi coniugati della forma $z = a \pm ib$ con

$$a = \frac{1}{4} \quad b = \frac{\sqrt{31}}{4}$$

Il loro modulo è $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{31}{16}} = \sqrt{\frac{32}{16}} = \sqrt{2}$

che è maggiore di 1 quindi il metodo non è stabile.

(b) Riscriviamo la formula:

$$\eta_{k+2} + 2\eta_{k+1} - 4\eta_k = h[f(x_k, \eta_k)]$$

$a_2 = 1 \quad a_1 = 2 \quad a_0 = -4$

$$\rho(\omega) = \omega^2 + 2\omega - 4 = 0$$

$$\omega_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$$

che hanno entrambi modulo > 1. Il metodo è non stabile

⑤ Stabilire per quali valori di $\gamma = \frac{1}{2}, 1, 2$ il seguente metodo multistep è stabile

$$\eta_{k+2} = \gamma \eta_k + 4h f(x_k, \eta_k)$$

Soluzione:

$$\eta_{k+2} - \gamma \eta_k = h\left[4f(x_k, \eta_k)\right]$$

$$a_2 = 1 \quad a_1 = 0 \quad a_0 = -\gamma$$

- $\gamma = 1/2$ $\quad \rho(\omega) = \omega^2 - 1/2 = 0 \to \omega = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$
  $|\omega| < 1$ quindi il metodo è stabile

- $\gamma = 1$ $\quad \rho(\omega) = \omega^2 - 1 = 0 \to \omega = \pm 1$
  $|\omega| = 1$ (doppia) non stabile

- $\gamma = 2$ $\quad \rho(\omega) = \omega^2 - 2 = 0 \to \omega = \pm\sqrt{2}$
  $|\omega| > 1$ non stabile

⑥ Stabilire se il seguente metodo multistep è stabile

$$\eta_{k+2} = \frac{1}{2}\eta_{k+1} - \frac{1}{4}\eta_k + 3h f(x_k, \eta_k)$$

Soluzione:

$$\eta_{k+2} - \frac{1}{2}\eta_{k+1} + \frac{1}{4}\eta_k = h\left[3f(x_k, \eta_k)\right]$$

$a_2 = 1 \quad a_1 = -\frac{1}{2} \quad a_0 = \frac{1}{4}$

$$\rho(\omega) = \omega^2 - \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{4} = 0 \rightarrow 4\omega^2 - 2\omega + 1 = 0$$

$$\omega_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{8} = \frac{1}{4} \pm i\frac{1}{4}\sqrt{3}$$

Sono due numeri complessi coniugati della forma $z = a \pm ib$. Il loro modulo è

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \quad < 1 \quad \underline{\text{stabile}}$$

(7) Stabilire l'ordine di consistenza dei seguenti metodi multistep:

(a) $\eta_{k+2} = -\eta_{k+1} + 2\eta_k + 3h\, f(x_k, \eta_k)$

(b) $\eta_{k+2} = -2\eta_{k+1} + 3\eta_k + 4h\, f(x_k, \eta_k)$

(c) $\eta_{k+2} = -\frac{1}{2}\eta_{k+1} + \frac{3}{2}\eta_k + \frac{5}{2}h\, f(x_k, \eta_k)$

(d) $\eta_{k+3} = +\frac{1}{4}\eta_{k+2} + \frac{3}{4}\eta_{k+1} + \frac{7}{4}h\, f(x_{k+1}, \eta_{k+1})$

<u>Soluzione:</u>

(a) Riscriviamo la formula e individuiamo i coefficienti:

$$\eta_{k+2} + \eta_{k+1} - 2\eta_k = h\,[3 f(x_k, \eta_k)]$$

$a_2 = 1, \; a_1 = 1, \; a_0 = -2 \qquad b_2 = b_1 = 0 \qquad b_0 = 3$

Per studiare la consistenza dobbiamo sviluppare:

$$\tau(x,h) = \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{r} a_j y(x+jh) - \sum_{j=0}^{r} b_j y'(x+jh) =$$

$$= \frac{1}{h}\left\{-2y(x) + y(x+h) + y(x+2h)\right\} - 3y'(x)$$

Sviluppo:

$$\tau(x,h) = \frac{1}{h}\left\{-2y(x) + \left[y(x) + \cancel{y'(x)\cdot h} + \frac{1}{2}y''(x)h^2 + o(h^3)\right] + \right.$$

$$\left. + \left[y(x) + \cancel{y'(x)2h} + \frac{1}{2}y''(x)4h^2 + o(h^3)\right]\right\} - \cancel{3y'(x)} =$$

$$= \frac{1}{2}y''(x)\cdot h + 2y''(x)h + o(h^2) = \frac{5}{2}y''(x)\cdot h + o(h^2) = o(h)$$

Il metodo è del 1° ordine perchè si annulla il termine costante ma non quello di 1° grado.

ⓑ $\eta_{n+2} + 2\eta_{n+1} - 3\eta_n = h\left[4f(x_n, \eta_n)\right]$

$a_2 = 1 \quad a_1 = 2 \quad a_0 = -3 \qquad b_2 = b_1 = 0 \quad b_0 = 4$

$$\tau(x,h) = \frac{1}{h}\left\{-3y(x) + 2y(x+h) + y(x+2h)\right\} - 4y'(x)$$

Sviluppo:

$$\tau(x,h) = \frac{1}{h}\left\{-3y(x) + 2\left[y(x) + \cancel{y'(x)h} + y''(x)\frac{h^2}{2} + o(h^3)\right] + \right.$$

$$\left. + \left[y(x) + \cancel{y'(x)2h} + \frac{1}{2}y''(x)4h^2 + o(h^3)\right]\right\} - \cancel{4y'(x)} =$$

$$= y''(x)h + 2y''(x)h + o(h^2) = 3y''(x)h + o(h^2) = o(h)$$

Il metodo è del 1° ordine

ⓒ $\eta_{n+2} + \frac{1}{2}\eta_{n+1} - \frac{3}{2}\eta_n + \frac{5}{2}h f(x_n, \eta_n)$

$a_2 = 1 \quad a_1 = \frac{1}{2} \quad a_0 = -\frac{3}{2} \qquad b_2 = b_1 = 0 \quad b_0 = \frac{5}{2}$

$$\tau(x,h) = \frac{1}{h}\left\{-\frac{3}{2}y(x) + \frac{1}{2}y(x+h) + y(x+2h)\right\} - \frac{5}{2}y'(x)$$

Sviluppo:

$$\tau(x,h) = \frac{1}{h}\left\{ -\frac{3}{2}y(x) + \frac{1}{2}\left[y(x) + y'(x)h + \frac{1}{2}y''(x)h^2 + O(h^3)\right] + \right.$$

$$\left. + \left[y(x) + y'(x)2h + \frac{1}{2}y''(x)4h^2 + O(h^3)\right]\right\} - \frac{5}{2}y'(x) =$$

$$= \frac{1}{4}y''(x)h + 2y''(x)h + O(h^2) = \frac{9}{4}y''(x)h + O(h^2) = O(h)$$

Il metodo è del 1° ordine.

ⓓ $\eta_{k+2} - \frac{1}{4}\eta_{k+1} - \frac{3}{4}\eta_k + \frac{7}{4}h\, f(x_k, \eta_k)$

$a_2 = 1 \quad a_1 = -\frac{1}{4} \quad a_0 = -\frac{3}{4} \qquad b_2 = b_1 = 0 \qquad b_0 = +\frac{7}{4}$

$$\tau(x,h) = \frac{1}{h}\left\{ -\frac{3}{4}y(x) - \frac{1}{4}y(x+h) + y(x+2h)\right\} - \frac{7}{4}y'(x) =$$

$$= \frac{1}{h}\left\{ -\frac{3}{4}y(x) - \frac{1}{4}\left[y(x) + y'(x)h + \frac{1}{2}y''(x)h^2 + O(h^3)\right] + \right.$$

$$\left. + \left[y(x) + y'(x)2h + \frac{1}{2}y''(x)4h^2 + O(h^3)\right]\right\} - \frac{7}{4}y'(x) =$$

$$= -\frac{1}{8}y''(x)h + 2y''(x)h + O(h^2) = \frac{15}{8}y''(x)h + O(h^2) = O(h)$$

Il metodo è del 1° ordine.