Nome, Cognome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prima prova intermedia di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi (per Ing. Ambiente e Territorio)
e
Calcolo Numerico (per Ing. Meccanica)
16 novembre 2019

1. Risolvere, mediante il metodo degli integrali generali, il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0 \\ u(x,0) = x^2 - \sin 3x \\ u_y(x,0) = 2x + 3\cos 3x. \end{cases}$$

[Punteggio massimo: 6]

Soluzione.

$$u(x,y) = (x+y)^2 + \frac{1}{2}\sin\left(3(x+y)\right) - \frac{3}{2}\sin\left(3x-y\right).$$

2. Determinare gli autovalori $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ e le autofunzioni $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ del seguente problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} 3y''(x) + 8y'(x) + (5-\lambda)y(x) = 0, \qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ y(0) + y'(0) = 0 \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0. \end{cases}$$

Identificare la funzione peso rispetto alla quale le autofunzioni sono ortogonali stabilendo la relazione di ortogonalità e illustrare un modo per calcolare i coefficienti della seguente serie

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k(x),$$

dove f è una funzione continua definita in $[0,\ \pi/2]$.

[Punteggio massimo: 10]

Soluzione. Gli autovalori sono dati da

$$\lambda_k = -\left(\frac{\gamma_k^2+1}{3}\right), \qquad \textit{con} \qquad \gamma_k = \frac{6}{\pi} z_k, \qquad \textit{e} \quad (2k-1)\frac{\pi}{2} < z_k < k\pi.$$

Le autofunzioni sono date da

$$y_k(x) = e^{-4/3x}\left[\cos\left(\frac{\gamma_k}{3}x\right) + \frac{1}{\gamma_k}\sin\left(\frac{\gamma_k}{3}x\right)\right]$$

e sono ortogonali rispetto alla funzione peso $r(x) = \frac{1}{3}e^{-\frac{8}{3}x}$ *nel senso che*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} y_k(x)y_h(x)r(x)dx = N_k\delta_{hk},$$

con N_k *opportuna costante diversa da zero. I coefficienti richiesti sono dati*

$$c_k = \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} y_k(x)f(x)r(x)dx}{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} y_k^2(x)r(x)dx}.$$

3. Risolvere, mediante separazione delle variabili, il seguente problema

$$\begin{cases} u_{tt} = 5u_{xx} - u_t + 2u_x - 3u + \cos x, & 0 \le x \le 5, t \ge 0 \\ u(0,t) = 1 \\ u(5,t) = 3 \\ u(x,0) = x(5-x) \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

[Punteggio massimo: 14]

Soluzione. La soluzione del problema dato è

$$u(x,t) = \Psi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k(t) v_k(x)$$

dove

- $\Psi(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3/5x} + \dfrac{2}{17}\cos x - \dfrac{1}{34}\sin x$ *con*

$$c_1 = -c_2 - \frac{15}{15}, \qquad c_2 = \frac{1}{e^3 - e^{-5}}\left[3 - \frac{2}{17}\cos 5 + \frac{1}{34}\sin 5 + \frac{15}{17}e^{-5}\right];$$

- $v_k(x) = e^{-x/5}\sin\left(k\frac{\pi}{5}x\right)$;
- $w_k(t) = e^{-t/2}\left[\cos(\beta_k t) + \sin(\beta_k t)\right]$, *con* $\beta_k = \frac{4\lambda_k - 1}{2}$, $\lambda_k = \frac{(k\pi)^2}{5} + \frac{16}{5}$;
- $c_k = \dfrac{\displaystyle\int_0^5 v_k(x)x(5-x)e^{2/5x}dx}{\displaystyle\int_0^5 v_k^2(x)e^{2/5x}dx}.$