Nome, Cognome e matricola:..

Corso di studi:..

Seconda prova intermedia di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi (per Ing. Ambiente e Territorio)
e
Calcolo Numerico (per Ing. Meccanica)
9 gennaio 2020

1. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \alpha & \frac{1}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{1}{2} & \alpha \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro reale α la matrice A è invertibile e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 3$, si dica, motivando opportunamente la risposta, se il metodo di Gauss-Seidel è convergente e si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss Seidel a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 1]^T$.

[Punteggio massimo: 6]

Soluzione. La matrice A è invertibile se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\}$ e il metodo di Jacobi converge se $\alpha < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ oppure se $\alpha > \frac{\sqrt{3}}{3}$. Se $\alpha = 3$, il metodo di Gauss-Seidel converge perché la matrice A risulta essere diagonalmente dominante in senso stretto. Le iterazioni richieste sono $\mathbf{x}^{(1)} = [-1/6, 7/6, -1/9]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [7/18, 73/54, -34/81]^T$.

2. Illustrare la risoluzione numerica, mediante discretizzazione alle differenze finite, del seguente problema differenziale

$$\begin{cases} 3y''(x) + (x \sin x)y'(x) + (2\cos x - 3)y(x) = x^2, & -2 \le x \le 3 \\ y(-2) = 1 \\ y(3) = 5 \end{cases}$$

Si discuta dettagliatamente le proprietà strutturali del sistema lineare a cui si perviene esplicitandolo in forma matriciale nel caso $n = 4$ (si espliciti matrice, vettore delle incognite e termine noto). Si indichi, inoltre, motivando opportunamente la risposta, un possibile metodo numerico per la sua risoluzione. Infine, si determini una stima dei nodi di discretizzazione affinchè l'errore teorico del metodo sia dell'ordine di 10^{-4}.

[Punteggio massimo: 10]

Soluzione. Il sistema a cui si perviene è tridiagonale e la matrice dei coefficienti del sistema è a dominanza diagonale in senso stretto se $h \leq 2$. Sotto tale ipotesi, il sistema quindi è invertibile e un metodo di tipo Jacobi o Gauss-Seidel potrebbe essere applicato per la sua risoluzione in quanto sicuramente convergenti. Se si sceglie un numero di nodi $n \geq 499$ l'errore teorico del metodo è dell'ordine richiesto.

3. Illustrare la risoluzione numerica, con il metodo delle differenze finite, del seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} = 3u_{xx} + (xt^2)u_t + (\cos x)u + \sin(xt), & -5 \leq x \leq 5,\ t \geq 0 \\ u(-5,t) = 0 \\ u(5,t) = 50 \\ u(x,0) = x(5+x) \\ u_t(x,0) = 1. \end{cases}$$

Discutere, dettagliatamente, l'approssimazione della soluzione agli istanti t_j con $j = 0, 1, 2$. Nel caso l'approssimazione sia soluzione di un sistema, rappresentare la matrice dei coefficienti per $n = 4$. Stabilire, quindi, le condizioni che assicurano l'invertibilità di tale sistema e la convergenza del metodo iterativo di Gauss-Seidel. Fornire, infine, una stima teorica dell'errore nel caso in cui la griglia abbia passo $h = 10^{-3}$ e $k = 10^{-2}$.

[Punteggio massimo: 14]

Soluzione. Agli istanti $j = 0, 1$ la soluzione è data da

$$u_{i,0} = (-5 + ih)ih, \qquad i = 1, ..., n, \qquad h = \frac{10}{n+1}$$
$$u_{i,1} = u_{i,0} + k + \frac{3}{2}k^2 \left(\frac{u_{i+1,0} - 2u_{i,0} + u_{i-1,0}}{h^2} \right) + \cos(x_i) u_{i0}.$$

Se $j = 2$ $u_{i,2}$ è l'unica soluzione di un sistema lineare tridiagonale di dimensione $n \times n$. Nel caso $n = 4$ (e quindi $h = 2$), tale sistema ha matrice dei coefficienti con elementi della sopra e sotto diagonale pari a $\frac{3}{2}h^2$ e elementi della diagonale principale pari a

$$a_{ii} = -\left(\frac{1}{k^2} + \frac{3}{h^2} - \frac{2x_i k^2}{k} \right).$$

La matrice è invertibile e il metodo di Gauss-Seidel è convergente per ogni valore di h e k se $q(x,t) \leq 0$; e per ogni valore di h e per un passo $k \leq \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$ se $q(x,t) > 0$. La stima dell'errore è $\max_{i,j} |u(x_i, t_j) - u_{ij}| \simeq 10^{-4}$.