Nome, Cognome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Recupero Seconda prova intermedia di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi (per Ing. Ambiente e Territorio)
e
Calcolo Numerico (per Ing. Meccanica)
30 gennaio 2020

1. Data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2\alpha \end{bmatrix}$$
deteminare per quali valore del parametro α la matrice A è invertibile e per quali i suoi autovalori sono positivi. Si consideri poi il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1,\, 0,\, 2]^T$. Si studi al variare del parametro α la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato a tale sistema e, assegnato $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterazioni del metodo di Jacobi considerando come vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1, 0]^T$.

   [Punteggio massimo 6]

   Soluzione. La matrice A è invertibile per $\alpha \neq 0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2$. Gli autovalori sono positivi per $\alpha > \sqrt{2}/2$. Il metodo di Gauss-Seidel converge se $\alpha > \sqrt{2}/2$ oppure $\alpha < -\sqrt{2}/2$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [-1/2, 0, 0]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [1/2, 0, 5/8]^T$.

2. Illustrare la risoluzione numerica, mediante discretizzazione alle differenze finite, del seguente problema differenziale
$$\begin{cases} 2y''(x) + 3x^2 y'(x) - (1 - \sin x)y(x) = x + 1, \qquad -6 \leq x \leq 6 \\ y(-6) = 1 \\ y(6) = 3. \end{cases}$$
   Inoltre,

   1 evidenziare la struttura del sistema lineare a cui si perviene indicando dettagliatamente gli elementi non nulli della matrice dei coefficienti;

   2 individuare, motivando opportunamente la risposta, la condizione sul passo di discretizzazione h che garantisce l'invertibilità della matrice dei coefficienti;

   3 dire, giustificando opportunamente la risposta, se la matrice dei coefficienti è diagonalmente dominante e irriducibile oppure se è diagonalmente dominante in senso stretto.

[Punteggio massimo: 10]

Soluzione. 1. Il sistema è tridiagonale e gli elementi non nulli sono

$$a_i = -\left(\frac{4}{h^2} + (1 - \sin x_i)\right), \qquad b_i = \frac{2}{h^2} - \frac{3x_i^2}{2h}, \qquad c_i = \frac{2}{h^2} + \frac{3x_i^2}{2h}$$

avendo indicato con a_i gli elementi della diagonale principale e con b_i e c_i gli elementi della sotto e sopra diagonale, rispettivamente;
2. Se $h < \frac{1}{27}$ la matrice è invertibile
3. Sotto le ipotesi del punto 2 ed essendo la funzione $-(1 - \sin x) \leq 0$ la matrice dei coefficienti è diagonalmente dominante e irriducibile.

3. Classificare il seguente problema differenziale e illustrarne la risoluzione numerica mediante differenze finite

$$\begin{cases} (3 - \cos x)u_{xx} + 3u_{yy} + (xy^2)u_x - (x \sin y)u_y = x^2y^2, \qquad -2 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 5 \\ u(-2, y) = y \\ u(4, y) = y \\ u(x, 0) = 0 \\ u(x, 5) = 5. \end{cases}$$

Inoltre

(a) Evidenziare la struttura del sistema lineare a cui si perviene, indicando dettagliatamente gli elementi non nulli;
(b) Stabilire quali sono le condizioni che i passi di discretizzazione h e k devono soddisfare affinchè il metodo di Jacobi applicato al sistema sia convergente;
(c) Fornire una stima teorica dell'errore nel caso in cui la griglia abbia passo $h = k = 10^{-4}$.

[Punteggio massimo: 14]

Soluzione. 1. La matrice dei coefficienti è pentadiagonale e gli elementi non nulli risultano essere:

- *elementi della diagonale principale* $a_{ij} = -\left(\frac{2(3-\cos x_i)}{h^2} + \frac{6}{k^2}\right)$;
- *elementi della prima sopra diagonale* $b_{ij} = \left(\frac{(3-\cos x_i)}{h^2} - \frac{x_i y_j^2}{2h}\right)$
- *elementi della prima sotto diagonale* $\hat{b}_{ij} = \left(\frac{(3-\cos x_i)}{h^2} + \frac{x_i y_j^2}{2h}\right)$
- *elementi della n-esima sopra diagonale* $c_{ij} = \left(\frac{3}{k^2} + \frac{x_i \sin y_j}{2k}\right)$
- *elementi della n-esima sotto diagonale* $\hat{c}_{ij} = \left(\frac{3}{k^2} - \frac{x_i \sin y_j}{2k}\right)$

2. Le condizioni richieste sono $h \leq \frac{4}{10^2}$ e $k \leq \frac{3}{2}$
3. L'errore teorico è dell'ordine di 10^{-8}.