Nome, Cognome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi (per Ing. Ambiente e Territorio)
e
Calcolo Numerico (per Ing. Meccanica)
9 gennaio 2020

1. Risolvere, mediante il metodo degli integrali generali, il seguente problema differenziale
$$\begin{cases} 2u_{xx} - 5u_{xy} + u_{yy} = 0 \\ u(x,0) = \sin x \\ u_y(x,0) = x. \end{cases}$$
[Punteggio massimo: 6]

   Soluzione.
$$u(x,y) = -\frac{z_2}{\sqrt{17}} \sin(x + z_1 y) + \frac{(x+z_1y)^2}{2\sqrt{17}} + \frac{z_1}{\sqrt{17}} \sin(x + z_2 y) - \frac{1}{2\sqrt{17}}(x+z_2y)^2,$$
   con $z_1 = \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ *e* $z_2 = \dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$.

2. Determinare lo spettro del seguente problema di Sturm-Liouville
$$\begin{cases} y''(x) + 3y'(x) + (1-\lambda)y(x) = 0, \qquad 0 \le x \le 2 \\ y'(0) - \frac{1}{2}y(0) = 0 \\ y(2) = 0. \end{cases}$$
   Identificare la funzione peso rispetto alla quale le autofunzioni sono ortogonali stabilendo la relazione di ortogonalità.

   [Punteggio massimo: 10] *Soluzione. Lo spettro del problema dato è*
$$\left\{ \lambda_k = -\frac{4\gamma_k^2 + 5}{4} \, con \, \gamma_k = \frac{z_k}{2} \, e \, z_k \in \left[(2k-1)\frac{\pi}{2},\, k\pi\right] \right.$$
$$\left. y_k(x) = e^{-\frac{3}{2}x}\left(-\frac{\gamma_k(x)}{2}\cos(2\gamma_k x) + \sin(2\gamma_k x)\right) \right\}.$$
   La funzione peso è $r(x) = e^{3x}$ *e le relazioni di ortogonalità sono*
$$\int_0^2 y_k(x) y_h(x) r(x) dx = \delta_{hk}.$$

3. Illustrare la risoluzione numerica, con il metodo delle differenze finite, del seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} = 3u_{xx} + (xt^2)u_t + (\cos x)u + \sin(xt), & -5 \leq x \leq 5,\ t \geq 0 \\ u(-5,t) = 0 \\ u(5,t) = 50 \\ u(x,0) = x(5+x) \\ u_t(x,0) = 1. \end{cases}$$

Discutere, dettagliatamente, l'approssimazione della soluzione agli istanti t_j con $j = 0, 1, 2$. Nel caso l'approssimazione sia soluzione di un sistema, rappresentare la matrice dei coefficienti per $n = 4$. Stabilire, quindi, le condizioni che assicurano l'invertibilità di tale sistema e la convergenza del metodo iterativo di Gauss-Seidel. Fornire, infine, una stima teorica dell'errore nel caso in cui la griglia abbia passo $h = 10^{-3}$ e $k = 10^{-2}$.

[Punteggio massimo: 14]

Soluzione. Agli istanti $j = 0, 1$ la soluzione è data da

$$u_{i,0} = (-5 + ih)ih, \qquad i = 1, ..., n, \qquad h = \frac{10}{n+1}$$

$$u_{i,1} = u_{i,0} + k + \frac{3}{2}k^2 \left(\frac{u_{i+1,0} - 2u_{i,0} + u_{i-1,0}}{h^2} \right) + \cos(x_i)u_{i0}.$$

Se $j = 2$ $u_{i,2}$ è l'unica soluzione di un sistema lineare tridiagonale di dimensione $n \times n$. Nel caso $n = 4$ (e quindi $h = 2$), tale sistema ha matrice dei coefficienti con elementi della sopra e sotto diagonale pari a $\frac{3}{2}h^2$ e elementi della diagonale principale pari a

$$a_{ii} = -\left(\frac{1}{k^2} + \frac{3}{h^2} - \frac{2x_i k^2}{k} \right).$$

La matrice è invertibile e il metodo di Gauss-Seidel è convergente per ogni valore di h e k se $q(x,t) \leq 0$; e per ogni valore di h e per un passo $k \leq \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$ se $q(x,t) > 0$. La stima dell'errore è $\max_{i,j} |u(x_i, t_j) - u_{ij}| \simeq 10^{-4}$.