Nome, Cognome e matricola:...

Corso di studi:..

Prova scritta di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi (per Ing. Ambiente e Territorio)
e
Calcolo Numerico (per Ing. Meccanica)
30 gennaio 2020

1. Risolvere, mediante il metodo degli integrali generali, il seguente problema differenziale
$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xt} + 3u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = x^2 \\ u_t(x,0) = x+1. \end{cases}$$
[Punteggio massimo: 6]

   Soluzione.
$$u(x,y) = x^2 - t^2 + t + xt$$
.

2. Illustrare la risoluzione numerica, mediante discretizzazione alle differenze finite, del seguente problema differenziale
$$\begin{cases} 2y''(x) + 3x^2 y'(x) - (1-\sin x)y(x) = x+1, \qquad -6 \le x \le 6 \\ y(-6) = 1 \\ y(6) = 3. \end{cases}$$
Inoltre,

   1 evidenziare la struttura del sistema lineare a cui si perviene indicando dettagliatamente gli elementi non nulli della matrice dei coefficienti;

   2 individuare, motivando opportunamente la risposta, la condizione sul passo di discretizzazione h che garantisce l'invertibilità della matrice dei coefficienti;

   3 dire, giustificando opportunamente la risposta, se la matrice dei coefficienti è diagonalmente dominante e irriducibile oppure se è diagonalmente dominante in senso stretto.

   [Punteggio massimo: 10]

   Soluzione. 1. Il sistema è tridiagonale e gli elementi non nulli sono
$$a_i = -\left(\frac{4}{h^2} + (1-\sin x_i)\right), \qquad b_i = \frac{2}{h^2} - \frac{3x_i^2}{2h}, \qquad c_i = \frac{2}{h^2} + \frac{3x_i^2}{2h}$$

avendo indicato con a_i gli elementi della diagonale principale e con b_i e c_i gli elementi della sotto e sopra diagonale, rispettivamente;
2. Se $h < \frac{1}{27}$ la matrice è invertibile
3. Sotto le ipotesi del punto 2 ed essendo la funzione $-(1-\sin x) \leq 0$ la matrice dei coefficienti è diagonalmente dominante e irriducibile.

3. Risolvere, mediante separazione delle variabili, il seguente problema

$$\begin{cases} u_{tt} = 5u_{xx} + 3u_x - 2u, & 0 \leq x \leq 3, t \geq 0 \\ u(0,t) = 2 \\ u(3,t) = 3 \\ u(x,0) = x(3-x) \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

[Punteggio massimo: 14]

Soluzione. La soluzione del problema dato è

$$u(x,t) = \Psi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k(t) v_k(x)$$

dove

- $\Psi(x) = c_1 e^{2/5x} + c_2 e^{-x}$ *con*

$$c_1 = 2 - c_2, \qquad c_2 = \frac{3 - 2e^{6/5}}{e^{-3} - e^{6/5}};$$

- $v_k(x) = e^{-3/10x} \sin\left(k\frac{\pi}{3}x\right);$
- $w_k(t) = \cos\sqrt{\lambda_k t}$, *con* $\lambda_k = \dfrac{\frac{100}{9}k^2\pi^2 + 49}{20};$
- $c_k = \dfrac{\displaystyle\int_0^3 v_k(x)[x(3-x) - \Psi(x)]e^{3/5x}dx}{\displaystyle\int_0^3 v_k^2(x)e^{3/5x}dx}.$