Nome, Cognome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi (per Ing. Ambiente e Territorio)
e
Calcolo Numerico (per Ing. Meccanica)
19 febbraio 2020

1. Risolvere, mediante il metodo degli integrali generali, il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} 2u_{xx} + 5u_{xy} + 3u_{yy} = 0 \\ u(0, y) = 1 \\ u_x(0, y) = \frac{2}{3}y. \end{cases}$$

[Punteggio massimo: 6]

Soluzione.

$$u(x, y) = \frac{5}{6}x^2 - \frac{10}{3}xy + 1.$$

2. Si consideri il seguente problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} 3y''(x) + 6y'(x) + (9 + \lambda)y(x) = 0, \qquad 0 \leq x \leq 5 \\ 2y'(0) + y(0) = 0 \\ y(5) = 0, \end{cases}$$

e si identifichi

1 il suo spettro;

2 la funzione peso rispetto alla quale le autofunzioni sono ortogonali;

3 la relazione di ortogonalità.

[Punteggio massimo: 10]

Soluzione. 1. Gli autovalori sono dati da

$$\lambda_k = \left(\frac{4\gamma_k^2 - 18}{3}\right), \qquad con \qquad \gamma_k = \frac{z_k}{5}, \qquad e \quad (2k-1)\frac{\pi}{2} < z_k < k\pi.$$

Le autofunzioni sono date da

$$y_k(x) = e^{-x}\left[\frac{2\gamma_k}{3}\cos\left(\frac{\gamma_k}{3}x\right) + \sin\left(\frac{\gamma_k}{3}x\right)\right]$$

2.La funzione peso è $r(x) = \frac{1}{3}e^{2x}$
3. La relazione di ortogonalità è

$$\int_0^5 y_k(x)y_h(x)r(x)dx = N_k\delta_{hk},$$

con N_k *opportuna costante diversa da zero.*

3. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_t = 3u_{xx} + 6\cos(xt)u_x - 3xu + \sin x, & 0 \leq x \leq 5, \quad t \geq 0 \\ u(0,t) = 2 \\ u(5,t) = 3 \\ u(x,0) = 2 + \sin\left(\frac{\pi}{10}x\right). \end{cases}$$

Si discuta

1 la sua classificazione;

2 la sua risoluzione numerica mediante differenze finite, indicando con n e m il numero dei nodi per costruire la mesh su x e t, rispettivamente;

3 le condizioni da imporre ai passi di discretizzazione introdotti al punto 2, affinchè il sistema lineare possa essere risolto con un metodo iterativo stazionario del primo ordine;

4 la stima teorica dell'errore mediante il metodo descritto al punto 2, indicando, in particolare, il numero dei punti necessari per avere un errore dell'ordine di almeno 10^{-4} all'istante finale $T = 5$ e assumendo $n = m$.

[Punteggio massimo: 14]

Soluzione. 1. Il problema dato è di tipo parabolico con condizioni di tipo Dirichlet. 2. Lo schema da introdurre è uno schema a 4 punti del primo ordine in t *e secondo ordine in* x*. 3. Il passo di discretizzazione in tempo* k *non è soggetto a restrizioni. Al contrario quello in* x *deve essere tale che* $h \leq 1$*. 4. L'errore è* $\mathcal{O}(h^2 + k)$ *e di conseguenza per raggiungere la precisione richiesta deve essere* $n \geq 30 \cdot 10^4 - 1$*.*