**Nome, Cognome e Matricola:**.................................................

**Corso di Studi:**............................................................

**Prima prova intermedia di**
**Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi**
13 novembre 2020
Compito numero 1

1. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-5, 5]$

$$\sqrt{7}y'' + y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 1, & -5 \le x \le -4, \\ \dfrac{x}{4} + 2, & -4 \le x \le 0, \\ -\dfrac{x}{4} + 2, & 0 \le x \le 4, \\ 1, & 4 \le x \le 5 \\ f(x+10), & \text{altrove.} \end{cases}$$

Stabilire, inoltre, motivando opportunamente la risposta, quale è il valore della serie di Fourier di $f$ in $x = 3$ e $x = 5$.

*Soluzione: Dal teorema della convergenza segue che $S_f(3) = 5/4$ e $S_f(5) = 1$. Inoltre risulta che*

$$S_y(x) = \frac{7}{5} + \frac{125}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1 - \cos\left(\frac{4}{5}k\pi\right)}{k^2\pi^2(25 - \sqrt{7}k^2\pi^2)} \right] \cos\left(k\frac{\pi}{5}x\right).$$

2. Classificare la PDE del seguente problema differenziale e risolverlo mediante il metodo degli integrali generali

$$\begin{cases} u_{tt} = 3u_{xt} + 3u_{xx} \\ u(x, 0) = x + 1 \\ u_t(x, 0) = 1. \end{cases}$$

*Soluzione. Il problema differenziale presenta una PDE di tipo iperbolico. La soluzione è*

$$u(x, t) = \frac{\sqrt{21} - 1}{2\sqrt{21}}(x + z_1 t) + 1 + \frac{\sqrt{21} + 1}{2\sqrt{21}}(x + z_2 t)$$

*dove $z_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}$ e $z_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}$.*

3. Si riconduca il seguente problema differenziale, mediante il metodo di separazione delle variabili, alla risoluzione di più problemi alle derivate ordinarie

$$\begin{cases} u_{tt} = 3u_{xx} + 3u_t + 2u_x - 5u + x^2 + 1, \qquad 0 \leq x \leq 3, \qquad t \geq 0 \\ u(0,t) = -3 \\ u(3,t) = 7 \\ u(x,0) = 2 - 5\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

Si consideri, quindi, il problema di Sturm-Liouville che ne deriva. Si determinino gli autovalori e le autofunzioni nel caso in cui le radici dell'equazione caratteristica siano complesse e coniugate. Si stabilisca, inoltre, la funzione peso e la relazione di ortogonalità di tali autofunzioni.

*Soluzione. Scriviamo $u(x,t) = \varphi(x,t) + \Psi(x)$ dove $\varphi$ e $\Psi$ sono le soluzioni dei seguenti problemi*

$$\begin{cases} \varphi_{tt} = 3\varphi_{xx} + 3\varphi_t + 2\varphi_x - 5\varphi, \qquad 0 \leq x \leq 3,\ t \geq 0 \\ \varphi(0,t) = 0 \\ \varphi(3,t) = 0 \\ \varphi(x,0) = 2 - 5\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - \Psi(x) \\ \varphi_t(x,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} -3\Psi''(x) - 2\Psi'(x) + 5\Psi(x) = x^2 + 1 \\ \Psi(0) = -3 \\ \Psi(3) = 7 \end{cases}$$

*Risolvendo il primo problema con la separazione delle variabili i.e. $\varphi(x,t) = v(x)w(t)$ troviamo i seguenti problemi*

$$\begin{cases} w''(t) - 3w'(t) - \lambda w(t) = 0 \\ w'(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3v''(x) + 2v'(x) - (5+\lambda)v(x) = 0 \\ v(0) = 0 \\ v(3) = 0 \end{cases}$$

*Gli autovalori e le autofunzioni richieste sono*

$$v_k(x) = e^{-1/3x}\sin\left(k\frac{\pi}{3}x\right), \qquad \lambda_k = -\left(\frac{16}{3} + \frac{k^2\pi^2}{3}\right), \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

*La relazione di ortogonalità è*

$$\int_0^3 v_k(x)v_h(x)r(x)dx \begin{cases} \neq 0, & h = k \\ 0, & h \neq k \end{cases},$$

*dove $r(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{2}{3}x}$ è la funzione peso.*

**Prima prova intermedia di**
**Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi**
13 novembre 2020
Compito numero due

1. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-6,6]$

$$y'' + \sqrt{2}y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 1, & -6 \leq x \leq -4, \\ \frac{x}{4} + 2, & -4 \leq x \leq 0, \\ -\frac{x}{4} + 2, & 0 \leq x \leq 4, \\ 1, & 4 \leq x \leq 6 \\ f(x+12), & \text{altrove.} \end{cases}$$

Stabilire, inoltre, motivando opportunamente la risposta, quale è il valore della serie di Fourier di $f$ in $x=-2$ e $x=-6$.

*Soluzione: Dal teorema della convergenza segue che $S_f(-2) = 3/2$ e $S_f(-6) = 1$. Inoltre risulta che*

$$S_y(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{108}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1 - \cos\left(\frac{2}{3}k\pi\right)}{k^2(\sqrt{2} - k^2\pi^2)} \right] \cos\left(k\frac{\pi}{6}x\right).$$

2. Classificare la PDE del seguente problema differenziale e risolverlo mediante il metodo degli integrali generali

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xt} + 4u_{xx} \\ u(x,0) = x - 1 \\ u_t(x,0) = 2. \end{cases}$$

*Soluzione. Il problema differenziale presenta una PDE di tipo iperbolico. La soluzione è*

$$u(x,t) = x + 2t - 1.$$

3. Si riconduca il seguente problema differenziale, mediante il metodo di separazione delle variabili, alla risoluzione di più problemi alle derivate ordinarie

$$\begin{cases} u_{tt} = 3u_{xx} + 3u_t + 2u_x - 5u + x^2 + 1, & 0 \leq x \leq 3, \qquad t \geq 0 \\ u(0,t) = -3 \\ u(3,t) = 7 \\ u(x,0) = 2 - 5\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

Si consideri, quindi, il problema di Sturm-Liouville che ne deriva. Si determinino gli autovalori e le autofunzioni nel caso in cui le radici dell'equazione caratteristica siano complesse e coniugate. Si stabilisca, inoltre, la funzione peso e la relazione di ortogonalità di tali autofunzioni.

*Soluzione. Scriviamo* $u(x,t) = \varphi(x,t) + \Psi(x)$ *dove* $\varphi$ *e* $\Psi$ *sono le soluzioni dei seguenti problemi*

$$\begin{cases} \varphi_{tt} = 3\varphi_{xx} + 3\varphi_t + 2\varphi_x - 5\varphi, & 0 \leq x \leq 3,\ t \geq 0 \\ \varphi(0,t) = 0 \\ \varphi(3,t) = 0 \\ \varphi(x,0) = 2 - 5\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - \Psi(x) \\ \varphi_t(x,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} -3\Psi''(x) - 2\Psi'(x) + 5\Psi(x) = x^2 + 1 \\ \Psi(0) = -3 \\ \Psi(3) = 7 \end{cases}$$

*Risolvendo il primo problema con la separazione delle variabili i.e.* $\varphi(x,t) = v(x)w(t)$ *troviamo i seguenti problemi*

$$\begin{cases} w''(t) - 3w'(t) - \lambda w(t) = 0 \\ w'(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3v''(x) + 2v'(x) - (5+\lambda)v(x) = 0 \\ v(0) = 0 \\ v(3) = 0 \end{cases}$$

*Gli autovalori e le autofunzioni richieste sono*

$$v_k(x) = e^{-1/3x}\sin\left(k\frac{\pi}{3}x\right), \qquad \lambda_k = -\left(\frac{16}{3} + \frac{k^2\pi^2}{3}\right), \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

*La relazione di ortogonalità è*

$$\int_0^3 v_k(x)v_h(x)r(x)dx \begin{cases} \neq 0, & h = k \\ 0, & h \neq k \end{cases},$$

*dove* $r(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{2}{3}x}$ *è la funzione peso.*