

**Seconda prova intermedia di  
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi**  
8 gennaio 2021

1. Sia  $\alpha$  un parametro reale e si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ \alpha & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di  $\alpha$  il metodo iterativo di Gauss-Seidel risulta essere convergente se applicato al sistema  $Ax = b$  con  $b = [1, 0, 1]^T$ . Fissato  $\alpha = 1/2$ , si calcolino le prime due iterate di tale metodo considerando come punto iniziale  $x^{(0)} = [1, 0, 0]^T$ . Si supponga  $\alpha = 1$ , è possibile dare delle deduzioni sulla convergenza del metodo di Jacobi?

*Soluzione: Il metodo di Gauss-Seidel converge per ogni valore reale di  $\alpha$ . Se  $\alpha = 1/2$  le iterazioni sono  $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(2)} = [2, 0, 0]^T$ . Se  $\alpha = 1$ , la matrice è diagonalmente dominante. Il metodo di Jacobi, quindi potrebbe essere convergente qualora la matrice sia irriducibile.*

2. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} 4y''(x) + (x^2 + 10 \sin x)y'(x) + (2 \cos x - 2)y(x) = 0, & -2 \leq x \leq 2 \\ y(-2) = 1 \\ y(2) = 5. \end{cases}$$

Si illustri

- (a) lo schema numerico che si ottiene mediante discretizzazione alle differenze finite;
- (b) le proprietà strutturali del sistema lineare a cui si perviene esplicitandolo in forma matriciale nel caso  $n = 4$  (si espliciti matrice, vettore delle incognite e termine noto);
- (c) una stima dei nodi di discretizzazione affinché l'errore teorico del metodo sia dell'ordine di  $10^{-5}$ .

*Soluzione. Il sistema a cui si perviene è tridiagonale e la matrice dei coefficienti del sistema è a dominanza diagonale e irriducibile se  $h \leq 4/7$ . Se si sceglie un numero di nodi  $n \geq 4\sqrt{10^5} - 1$  l'errore teorico del metodo è dell'ordine richiesto.*

3. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_t = 4xu_x + (1 + 2x^2)u_{xx} - (2 + \cos(x))u + 3, & 0 \leq x \leq 3, \quad t \geq 0 \\ u(0, t) = 0 \\ u(3, t) = 0 \\ u(x, 0) = x(x - 3). \end{cases}$$

Si discuta

- (a) la sua classificazione;
- (b) la sua risoluzione numerica mediante differenze finite, indicando con  $n$  e  $m$  il numero dei nodi di discretizzazione per  $x$  e  $t$ , rispettivamente;
- (c) le condizioni da imporre ai passi di discretizzazione introdotti al punto 2, affinché il sistema lineare possa essere risolto con un metodo iterativo stazionario del primo ordine.

*Soluzione. Il problema dato è di tipo parabolico con condizioni di tipo Dirichlet. 2. Lo schema da introdurre è uno schema a 4 punti del primo ordine in  $t$  e secondo ordine in  $x$ . 3. Il passo di discretizzazione in tempo  $k$  non è soggetto a restrizioni. Al contrario quello in  $x$  deve essere tale che  $h \leq 1/6$ .*