Prova scritta di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi
8 gennaio 2021

1. Sia α un parametro reale e si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ \alpha & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di α il metodo iterativo di Gauss-Seidel risulta essere convergente se applicato al sistema $Ax = b$ con $b = [1, 0, 1]^T$. Fissato $\alpha = 1/2$, si calcolino le prime due iterate di tale metodo considerando come punto iniziale $x^{(0)} = [1, 0, 0]^T$. Si supponga $\alpha = 1$, è possibile dare delle deduzioni sulla convergenza del metodo di Jacobi?

Soluzione: Il metodo di Gauss-Seidel converge per ogni valore reale di α. *Se* $\alpha = 1/2$ *le iterazioni sono* $\mathbf{x^{(1)}} = \mathbf{x^{(2)}} = [2,\ 0\ ,0]^T$. *Se* $\alpha = 1$, *la matrice è diagonalmente dominante. Il metodo di Jacobi, quindi potrebbe essere convergente qualora la matrice sia irriducibile.*

2. Classificare la PDE del seguente problema differenziale e risolverlo mediante il metodo degli integrali generali

$$\begin{cases} u_{tt} = 5u_{xx} \\ u(x,0) = \cos x + \frac{1}{3}x^3 \\ u_t(x,0) = -5\sin x + \sqrt{5}x^2. \end{cases}$$

Soluzione. Il problema differenziale presenta una PDE di tipo iperbolico. La soluzione è

$$u(x,t) = \frac{\sqrt{5}+5}{2\sqrt{5}} \cos{(x + \sqrt{5}t)} + \frac{(x+\sqrt{5}t)^3}{3} - \frac{\sqrt{5}+5}{2\sqrt{5}} \cos{(x - \sqrt{5}t)}.$$

3. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_t = 4xu_x + (1+2x^2)u_{xx} - (2+\cos(x))u + 3, \qquad 0 \le x \le 3, \quad t \ge 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(3,t) = 0 \\ u(x,0) = x(x-3). \end{cases}$$

Si discuta

(a) la sua classificazione;

(b) la sua risoluzione numerica mediante differenze finite, indicando con n e m il numero dei nodi di discretizzazione per x e t, rispettivamente;

(c) le condizioni da imporre ai passi di discretizzazione introdotti al punto 2, affinchè il sistema lineare possa essere risolto con un metodo iterativo stazionario del primo ordine.

Soluzione. Il problema dato è di tipo parabolico con condizioni di tipo Dirichlet. 2. Lo schema da introdurre è uno schema a 4 punti del primo ordine in t e secondo ordine in x. 3. Il passo di discretizzazione in tempo k non è soggetto a restrizioni. Al contrario quello in x deve essere tale che $h \leq 1/6$.