Prova scritta di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi
29 gennaio 2021

1. Classificare la PDE del seguente problema differenziale e risolverlo mediante il metodo degli integrali generali

$$\begin{cases} u_{tt} = 3u_{xx} + 3u_{xt} \\ u(x,0) = x \\ u_t(x,0) = 1. \end{cases}$$

Soluzione. Il problema differenziale presenta una PDE di tipo iperbolico. La soluzione è

$$u(x,t) = x - \frac{t}{2}.$$

2. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_t = (3\sin xt)u_x + (t)\,u_{xx} + (t\,\cos(x))u - 1, \qquad -3 \le x \le 4, \quad t \in [0,\,2] \\ u(-3,t) = 1 \\ u(4,t) = 0 \\ u(x,0) = -\dfrac{1}{7}(x-4). \end{cases}$$

Si discuta

(a) la sua classificazione;

(b) la sua risoluzione numerica mediante differenze finite, indicando con n e m il numero dei nodi di discretizzazione per x e t, rispettivamente;

(c) le condizioni da imporre ai passi di discretizzazione introdotti al punto 2, affinchè il sistema lineare possa essere risolto con un metodo iterativo stazionario del primo ordine.

Soluzione. Il problema dato è di tipo parabolico con condizioni di tipo Dirichlet. 2. Lo schema da introdurre è uno schema a 4 punti del primo ordine in t e secondo ordine in x. 3. Il passo di discretizzazione in tempo k non è soggetto a restrizioni se $\cos(x_i) \le 0$. Al contrario, se $\cos x_i > 0$ allora è necessario richiedere $k < \frac{1}{2}$. Per quanto riguarda, invece, il passo h, questo deve essere tale che $h \le 2t_1/3$.

3. Si riconduca il seguente problema differenziale, mediante il metodo di separazione delle variabili, alla risoluzione di più problemi alle derivate ordinarie

$$\begin{cases} u_{xx} + 2u_{yy} + u_x - 2u_y + 3u = 2, \qquad x \in [0,3], \qquad y \in [0,8] \\ u(0,y) = 1 \\ u(3,y) = 0 \\ u(x,0) = 1 + \cos \dfrac{\pi}{3} x \\ u(x,8) = 1 - \dfrac{x}{3}. \end{cases}$$

Si consideri, quindi, il problema di Sturm-Liouville che ne deriva. Si determinino gli autovalori e le autofunzioni nel caso in cui le radici dell'equazione caratteristica siano complesse e coniugate. Si stabilisca, inoltre, la funzione peso e la relazione di ortogonalità di tali autofunzioni.

Soluzione. Scriviamo $u(x,t) = \varphi(x,t) + \Psi(x)$ dove φ e Ψ sono le soluzioni dei seguenti problemi

$$\begin{cases} \Psi''(x) + \Psi'(x) + 3\Psi(x) = 2 \\ \Psi(0) = 1 \\ \Psi(3) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \varphi_{xx} + 2\varphi_{yy} + \varphi_x - 2\varphi_y + 3\varphi = 0, \qquad 0 \le x \le 3,\ y \in [0,8] \\ \varphi(0,y) = 0 \\ \varphi(3,y) = 0 \\ \varphi(x,0) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - \Psi(x) \\ \varphi(x,8) = 1 - \frac{x}{3} \end{cases}$$

Risolvendo il secondo problema con la separazione delle variabili e cioè $\varphi(x,y) = v(x)w(y)$ troviamo i seguenti problemi

$$-w''(y) + 2w'(t) - \lambda w(t) = 0 \qquad \begin{cases} v''(x) + v'(x) + (3-\lambda)v(x) = 0 \\ v(0) = 0 \\ v(3) = 0 \end{cases}$$

Gli autovalori e le autofunzioni richieste sono

$$v_k(x) = e^{-x/2} \sin\left(k\frac{\pi}{3}x\right), \qquad \lambda_k = \left(\frac{11}{4} - \frac{k^2\pi^2}{9}\right), \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

La relazione di ortogonalità è

$$\int_0^3 v_k(x) v_h(x) r(x) dx \begin{cases} \neq 0, & h = k \\ 0, & h \neq k \end{cases},$$

dove $r(x) = e^x$ è la funzione peso.