Prova scritta di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi
18 giugno 2021

1. Classificare la PDE del seguente problema differenziale e risolverlo mediante il metodo degli integrali generali

$$\begin{cases} u_{tt} = 16u_{xx} \\ u(x,0) = x; \\ u_t(x,0) = x+3. \end{cases}$$

Soluzione. Il problema differenziale presenta una PDE di tipo iperbolico. La soluzione è

$$u(x,t) = \frac{1}{16}\left[(x+4t)^2 - (x-4t)^2\right] + x + 3t.$$

2. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} y''(x) + (x+3)^2 y'(x) - (x-\frac{3}{2})^2 y(x) = 1, & 1 \le x \le 2 \\ y(1) = 1 \\ y(2) = 3. \end{cases}$$

Si stabilisca

(a) lo schema numerico che si ottiene mediante discretizzazione alle differenze finite;
(b) il sistema lineare a cui si perviene esplicitandolo in forma matriciale nel caso $n = 3$ (si espliciti matrice, vettore delle incognite e termine noto);
(c) le condizioni da imporre al passo di discretizzazione h affinchè il metodo di Jacobi applicato al sistema risulti convergente;
(d) la stima teorica dell'errore nel caso in cui $h = 10^{-7}$.

Soluzione. Il sistema a cui si perviene è tridiagonale e la matrice dei coefficienti del sistema è irriducibile e a dominanza diagonale se $h \le 2/25$. *L'errore teorico del metodo è dell'ordine* 10^{-14}.

3. Illustrare la risoluzione numerica, con il metodo delle differenze finite, del seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_t = 3u_{xx} + (xt^2)u_x + 2^x u + x(t+1), & -3 \le x \le 3,\ t \ge 0 \\ u(-3,t) = 0 \\ u(3,t) = 27 \\ u(x,0) = x(3+x) \\ u_t(x,0) = 1. \end{cases}$$

Discutere, dettagliatamente, l'approssimazione della soluzione agli istanti t_j con $j = 0, 1$. Nel caso l'approssimazione sia soluzione di un sistema, rappresentare la matrice dei coefficienti per $n = 4$. Stabilire, quindi, le condizioni che assicurano l'invertibilità di tale sistema e la convergenza del metodo iterativo di Gauss-Seidel. Fornire, infine, una stima teorica dell'errore nel caso in cui il passo di discretizzazione della variabile x sia $h = 10^{-2}$ e il passo di discretizzazione della variabile tempo t sia $k = 10^{-3}$.

Soluzione. L'unica condizione che garantisce la convergenza del metodo di Gauss-Seidel e l'invertibilità del sistema è $k \leq 1/8$. *La stima teorica dell'errore è* 10^{-3}.