Prova scritta di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi
19 novembre 2021

1. Risolvere mediante il metodo degli integrali generali il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} = \sqrt{2}u_{xt} + 3u_{xx} \\ u(x,0) = x\,\cos x \\ u_t(x,0) = (x+1)^2. \end{cases}$$

Soluzione: Posto $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{7})$ *e* $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{7})$, *la soluzione è*

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & \frac{\sqrt{7}}{14}(x+z_1t)\cos(x+z_1t) + \frac{(x+1+z_1t)^3}{3} \\ & + \frac{\sqrt{7}+14}{14}(x+z_2t)\cos(x+z_2t) - \frac{(x+1+z_2t)^3}{3}. \end{aligned}$$

2. Si classifichi il seguente problema differenziale e si scriva la sua soluzione mediante sviluppo in serie con il metodo di separazione delle variabili

$$\begin{cases} 2u_t = -5u_{xx} - 3u_x + 4u, \qquad 0 \le x \le \pi, \qquad t \ge 0 \\ u(0,t) + 10u_x(0,t) = 0 \\ u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = x\cos x. \end{cases}$$

NOTA: Nella risoluzione del problema di Sturm-Liouville si consideri solo il caso in cui le radici dell'equazione caratteristica sono complesse e coniugate.

Soluzione. Il problema differenziale è di tipo Cauchy-misto e la PDE è di tipo parabolico. Scriviamo $u(x,t) = v(x)w(t)$ *dove* v *e* w *sono soluzioni dei seguenti problemi*

$$2w'(t) - \lambda w(t) = 0, \qquad \begin{cases} 5v''(x) + 3v'(x) + (\lambda-4)v(x) = 0 \\ v(0) + 10v'(0) = 0 \\ v(\pi) = 0. \end{cases}$$

La soluzione risulta quindi essere

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k(x) w_k(t)$$

dove

- $v_k(x) = e^{-\frac{3x}{10}} \left(\cos\left(\frac{z_k}{\pi}x\right) + \frac{\pi}{5z_k} \sin\left(\frac{z_k}{\pi}x\right) \right)$ *dove* $(2k-1)\frac{\pi}{2} \leq z_k \leq k\pi$
- $w_k(t) = e^{\lambda_k \frac{t}{2}}$ *con* $\lambda_k = \dfrac{89}{20} + \dfrac{5}{\pi^2} z_k^2$
- $c_k = \dfrac{\int_0^\pi x \cos x \, v_k(x) r(x) dx}{\int_0^\pi v_k^2(x) r(x) dx}$ *con* $r(x) = \frac{1}{5} e^{\frac{3x}{5}}$

3. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} y''(x) + 7(\cos x)^2 \, y'(x) - \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 y(x) = 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ y(0) = 1 \\ y(1/4) = \pi. \end{cases}$$

Si stabilisca

(a) lo schema numerico che si ottiene mediante discretizzazione alle differenze finite;

(b) il sistema lineare a cui si perviene esplicitandolo in forma matriciale nel caso $n = 3$ (si espliciti matrice, vettore delle incognite e termine noto);

(c) le condizioni da imporre al passo di discretizzazione h affinchè il metodo di Jacobi applicato al sistema risulti convergente;

(d) la stima teorica dell'errore nel caso in cui $h = 10^{-4}$.

Soluzione. Il sistema a cui si perviene è tridiagonale e la matrice dei coefficienti del sistema è a dominanza diagonale in senso stretto se $h \leq 2/7$. *L'errore teorico del metodo è dell'ordine* 10^{-8}.