Nome, Cognome e Matricola:..

Corso di Studi:..

Prima prova intermedia di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi
19 novembre 2021

1. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y''(x) + 8y(x) = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi \le x \le -\frac{\pi}{2}, \\ x^2, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ \pi, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi, \\ f(x+2\pi), & \text{altrove.} \end{cases}$$

   Stabilire, inoltre, motivando opportunamente la risposta, quale è il valore della serie di Fourier di f in $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = 1$. Dire, infine, se questa è differenziabile termine a termine.

   Soluzione : Dal teorema della convergenza segue che $S_f(1) = 1$ e $S_f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)$. la serie della f non è differenziabile termine a termine. Inoltre risulta che

$$S_y(x) = \frac{\pi}{16}\left(\frac{\pi}{12}+1\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{8-k^2} \cos(kx),$$

   dove

$$a_k = \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2k} - \frac{2}{k} - \frac{4}{\pi k^3}\right) + \frac{2}{k^2}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right).$$

2. Risolvere mediante il metodo degli integrali generali il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} = \sqrt{2}u_{xt} + 3u_{xx} \\ u(x,0) = x\cos x \\ u_t(x,0) = (x+1)^2. \end{cases}$$

   Soluzione: Posto $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{7})$ e $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{7})$, la soluzione è

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & \frac{\sqrt{7}}{14}(x+z_1t)\cos(x+z_1t) + \frac{(x+1+z_1t)^3}{3} \\ & + \frac{\sqrt{7}+14}{14}(x+z_2t)\cos(x+z_2t) - \frac{(x+1+z_2t)^3}{3}. \end{aligned}$$

3. Si classifichi il seguente problema differenziale e si scriva la sua soluzione mediante sviluppo in serie con il metodo di separazione delle variabili

$$\begin{cases} 2u_t = -5u_{xx} - 3u_x + 4u, & 0 \le x \le \pi, \qquad t \ge 0 \\ u(0,t) + 10u_x(0,t) = 0 \\ u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = x\cos x. \end{cases}$$

NOTA: Nella risoluzione del problema di Sturm-Liouville si consideri solo il caso in cui le radici dell'equazione caratteristica sono complesse e coniugate.

Soluzione. Il problema differenziale è di tipo Cauchy-misto e la PDE è di tipo parabolico. Scriviamo $u(x,t) = v(x)w(t)$ *dove* v *e* w *sono soluzioni dei seguenti problemi*

$$2w'(t) - \lambda w(t) = 0, \qquad \begin{cases} 5v''(x) + 3v'(x) + (\lambda - 4)v(x) = 0 \\ v(0) + 10v'(0) = 0 \\ v(\pi) = 0. \end{cases}$$

La soluzione risulta quindi essere

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k(x) w_k(t)$$

dove

- $v_k(x) = e^{-\frac{3x}{10}} \left(\cos\left(\frac{z_k}{\pi}x\right) + \frac{\pi}{5z_k} \sin\left(\frac{z_k}{\pi}x\right)\right)$ *dove* $(2k-1)\frac{\pi}{2} \le z_k \le k\pi$
- $w_k(t) = e^{\lambda_k \frac{t}{2}}$ *con* $\lambda_k = \frac{89}{20} + \frac{5}{\pi^2} z_k^2$
- $c_k = \frac{\int_0^\pi x\cos x \, v_k(x) r(x) dx}{\int_0^\pi v_k^2(x) r(x) dx}$ *con* $r(x) = \frac{1}{5}e^{\frac{3x}{5}}$