Nome, Cognome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Seconda prova intermedia di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi
17 gennaio 2022

1. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 1 \\ \alpha & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro reale α la matrice A è invertibile e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss Seidel a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1, 0]^T$.

Soluzione. La matrice A è invertibile se $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{\pm\sqrt{3}\}$ e il metodo di Jacobi converge se $-\sqrt{3} < \alpha < \sqrt{3}$. Se $\alpha = 1$, le iterazioni richieste sono $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(2)} = [0, 1/2, 1/2]^T$.

2. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} 5y''(x) + (x+1)y'(x) - (\cos x)^2 y(x) = x, & 0 \le x \le 3 \\ y(0) = 1 \\ y(3) = 5 \end{cases}$$

Si stabilisca

(a) lo schema numerico che si ottiene mediante discretizzazione alle differenze finite;

(b) il sistema lineare a cui si perviene esplicitandolo in forma matriciale nel caso $n = 3$ (si espliciti matrice, vettore delle incognite e termine noto);

(c) le condizioni da imporre al passo di discretizzazione h affinchè il sistema risulti essere invertibile e possa essere risolto mediante un metodo iterativo stazionario del primo ordine spiegandone il motivo;

(d) il numero dei nodi di discretizzazione necessari ad avere almeno un errore dell'ordine di 10^{-4}.

Soluzione. Il sistema a cui si perviene è tridiagonale e la matrice dei coefficienti del sistema è a dominanza diagonale e irriducibile se $h < \frac{5}{2}$. Sotto tale ipotesi, il sistema quindi è invertibile e un metodo di tipo Jacobi o Gauss-Seidel potrebbe essere applicato per la sua risoluzione in quanto sicuramente convergenti. Se si sceglie un numero di nodi $n \ge 299$ l'errore teorico del metodo è dell'ordine richiesto.

3. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_{yy} = -3u_{xx} + (xy^2)u_y + |\cos x|u + (y+1), & -4 \leq x, y \leq 4, \\ u(-4, y) = 0 \\ u(4, y) = 8 \\ u(x, 4) = x + 4 \\ u(x, -4) = x + 4. \end{cases}$$

Si stabilisca

(a) la classificazione della PDE e del problema dato;

(b) lo schema numerico che si ottiene mediante discretizzazione alle differenze finite;

(c) le condizioni da imporre ai passi di discretizzazione h e k affinchè il sistema risulti essere invertibile e possa essere risolto mediante un metodo di tipo Jacobi o Gauss-Seidel;

(d) una stima teorica dell'errore nel caso in cui la griglia abbia passo $h = 10^{-3}$ e $k = 10^{-2}$.

Soluzione. (a) Il problema è di tipo Dirichlet e el'equazione è di tipo ellittico. (b) Lo schema numerico è quello di discretizzazione a 5 punti. (c) Il sistema è invertibile e risolvibile con un metodo di tipo Jacobi o Gauss-Seidel se $k < \frac{1}{32}$ *e per ogni valore di* h. *(d) La stima teorica dell'errore è dell'ordine di* 10^{-4}.