Nome, Cognome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi
17 gennaio 2022

1. Classificare la PDE del seguente problema differenziale e risolverlo mediante il metodo degli integrali generali

$$\begin{cases} 2u_{tt} = 3u_{xx} \\ u(x,0) = \sin x + \frac{x^2}{2} \\ u_t(x,0) = \frac{1}{2}(\cos x - x). \end{cases}$$

Soluzione. La PDE di tipo iperbolico. La soluzione è

$$u(x,t) = \frac{6+\sqrt{6}}{12}\sin\left(x + \sqrt{\frac{3}{2}}t\right) + \frac{6-\sqrt{6}}{24}\left(x + \sqrt{\frac{3}{2}}t\right)^2$$
$$+ \frac{6-\sqrt{6}}{12}\sin\left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}t\right) - \frac{12-\sqrt{6}}{12}\left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}t\right)^2$$

2. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} 5y''(x) + (x+1)y'(x) - (\cos x)^2 y(x) = x, \qquad 0 \le x \le 3 \\ y(0) = 1 \\ y(3) = 5 \end{cases}$$

Si stabilisca

(a) lo schema numerico che si ottiene mediante discretizzazione alle differenze finite;

(b) il sistema lineare a cui si perviene esplicitandolo in forma matriciale nel caso $n = 3$ (si espliciti matrice, vettore delle incognite e termine noto);

(c) le condizioni da imporre al passo di discretizzazione h affinchè il sistema risulti essere invertibile e possa essere risolto mediante un metodo iterativo stazionario del primo ordine spiegandone il motivo;

(d) il numero dei nodi di discretizzazione necessari ad avere almeno un errore dell'ordine di 10^{-4}.

Soluzione. Il sistema a cui si perviene è tridiagonale e la matrice dei coefficienti del sistema è a dominanza diagonale e irriducibile se $h < \frac{5}{2}$. Sotto tale ipotesi, il sistema quindi è invertibile e un metodo di tipo Jacobi o Gauss-Seidel potrebbe essere applicato per la sua risoluzione in quanto sicuramente convergenti. Se si sceglie un numero di nodi $n \geq 299$ l'errore teorico del metodo è dell'ordine richiesto.

3. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_{yy} = -3u_{xx} + (xy^2)u_y + |\cos x|u + (y+1), & -4 \leq x, y \leq 4, \\ u(-4, y) = 0 \\ u(4, y) = 8 \\ u(x, 4) = x + 4 \\ u(x, -4) = x + 4. \end{cases}$$

Si stabilisca

(a) la classificazione della PDE e del problema dato;

(b) lo schema numerico che si ottiene mediante discretizzazione alle differenze finite;

(c) le condizioni da imporre ai passi di discretizzazione h e k affinchè il sistema risulti essere invertibile e possa essere risolto mediante un metodo di tipo Jacobi o Gauss-Seidel;

(d) una stima teorica dell'errore nel caso in cui la griglia abbia passo $h = 10^{-3}$ e $k = 10^{-2}$.

Soluzione. (a) Il problema è di tipo Dirichlet e l'equazione è di tipo ellittico. (b) Lo schema numerico è quello di discretizzazione a 5 punti. (c) Il sistema è invertibile e risolvibile con un metodo di tipo Jacobi o Gauss-Seidel se $k < \frac{1}{32}$ e per ogni valore di h. (d) La stima teorica dell'errore è dell'ordine di 10^{-4}.