Nome, Cognome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi
3 febbraio 2022

1. Classificare la PDE del seguente problema differenziale e risolverlo mediante il metodo degli integrali generali

$$\begin{cases} u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} = 0 \\ u(x,0) = x^3 + 3 \\ u_y(x,0) = 3x^2 + 1. \end{cases}$$

Soluzione. La PDE è di tipo iperbolico. La soluzione è

$$u(x,y) = \frac{1}{2}(x+z_1)^3 + \frac{1+\sqrt{3}}{2}(x+z_2)^3 + 4 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_1 = -2+\sqrt{3}, \quad z_2 = -2-\sqrt{3}.$$

2. Si scriva la soluzione del seguente problema differenziale mediante sviluppo in serie con il metodo di separazione delle variabili

$$\begin{cases} 2u_{xx} + 3u_{yy} = 0, \quad 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 3 \\ u(0,y) = 0, \\ u(2,y) = y+1 \\ u(x,0) = 0 \\ u(x,3) = 0. \end{cases}$$

La soluzione risulta quindi essere

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k(x) w_k(y)$$

dove

- $w_k(y) = \sin\left(\frac{k\pi}{3}y\right)$
- $v_k(x) = e^{\frac{k^2\pi^2}{\sqrt{6}}x} - e^{\frac{k^2\pi^2}{\sqrt{6}}x}$
- $c_k = \dfrac{1}{v_k(2)} \dfrac{\int_0^3 (y+1)\, w_k(x) dy}{\int_0^3 w_k^2(y) dy}$

3. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} 4y''(x) + (x+1)y'(x) - x^2 y(x) = \sin(x), & -2 \leq x \leq 2 \\ y(-2) = 0 \\ y(2) = 3. \end{cases}$$

Si stabilisca

(a) lo schema numerico che si ottiene mediante discretizzazione alle differenze finite;

(b) il sistema lineare a cui si perviene esplicitandolo in forma matriciale nel caso $n = 4$ (si espliciti matrice, vettore delle incognite e termine noto);

(c) le condizioni da imporre al passo di discretizzazione h affinchè il sistema risulti essere invertibile e possa essere risolto mediante un metodo iterativo stazionario del primo ordine spiegandone il motivo;

(d) il numero dei nodi di discretizzazione necessari ad avere almeno un errore dell'ordine di 10^{-6}.

Soluzione. Il sistema a cui si perviene è tridiagonale e la matrice dei coefficienti del sistema è a dominanza diagonale e irriducibile se $h < \frac{8}{3}$. *Sotto tale ipotesi, il sistema quindi è invertibile e un metodo di tipo Jacobi o Gauss-Seidel potrebbe essere applicato per la sua risoluzione in quanto sicuramente convergenti. Se si sceglie un numero di nodi* $n \geq 3999$ *l'errore teorico del metodo è dell'ordine richiesto.*