Nome, Cognome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi
18 febbraio 2022

1. Risolvere il seguente problema mediante il metodo degli integrali generali

$$\begin{cases} u_{xx} - \sqrt{6}u_{xy} + u_{yy} = 0 \\ u(x,0) = \sin x + \frac{x^2}{2} \\ u_y(x,0) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + x). \end{cases}$$

   Soluzione. La funzione cercata è

$$u(x,y) = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left[\sin(x + z_1 y) + \frac{(x+z_1 y)^2}{2}\right] + \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\sin(x + z_2 y) + \frac{(x+z_2 y)^2}{2}\right]$$

   dove $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)$ e $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)$.

2. Si scriva la soluzione del seguente problema differenziale mediante sviluppo in serie con il metodo di separazione delle variabili

$$\begin{cases} u_t + 3u_{xx} + 3u_x - 2u = 0, \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \ge 0 \\ u(0,t) - u_x(0,t) = 0, \\ u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = x(\pi - x). \end{cases}$$

   La soluzione risulta essere

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, e^{\lambda_k t}\, v_k(x)$$

   dove

   - $w_k(y) = \sin\left(\frac{k\pi}{3}y\right)$
   - $v_k(x) = e^{-x/2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\gamma_k\right) + \frac{9}{\gamma_k}\sin\left(\frac{\pi}{6}\gamma_k\right)\right], \qquad \gamma_k = \sqrt{12\lambda_k - 33}$
   - $c_k = \dfrac{\int_0^\pi x(\pi - x)\, v_k(x)\, e^{3x} dx}{\int_0^\pi v_k^2(x)\, e^{3x} dx}$

3. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} = 6u_{xx} + (xt^2)u_x + (\sin x)u + xt, & -3 \le x \le 3, \quad t \in [0,\, T] \\ u(-3,t) = 0 \\ u(3,t) = 27 \\ u(x,0) = x(3+x) \\ u_t(x,0) = 1. \end{cases}$$

Si scriva

(a) lo schema numerico alle differenze finite;

(b) l'approssimazione della soluzione agli istanti t_j con $j = 0, 1, 2$, stabilendo, nel caso in cui l'approssimazione sia un sistema, la matrice dei coefficienti per $n = 4$;

(c) le condizioni che assicurano la convergenza del metodo iterativo di Gauss-Seidel applicato al sistema determinato al punto precedente;

(d) la stima teorica dell'errore nel caso in cui la griglia abbia passo $h = 10^{-3}$ e $k = 10^{-4}$.

Soluzione. Agli istanti $j = 0, 1$ la soluzione è data da

$$u_{i,0} = (-3+ih)ih, \qquad i = 1, ..., n, \qquad h = \frac{9}{n+1}$$
$$u_{i,1} = u_{i,0} + k + 3\frac{k^2}{h^2}\left(\frac{u_{i+1,0} - 2u_{i,0} + u_{i-1,0}}{h^2}\right) + \frac{k^2}{2}\sin(x_i)u_{i0}.$$

Se $j = 2$ $u_{i,2}$ è l'unica soluzione di un sistema lineare tridiagonale di dimensione $n \times n$. Nel caso $n = 4$, tale sistema ha matrice dei coefficienti con elementi della sopra e sotto diagonale pari a $\frac{3}{h^2} \pm \frac{x_i t_j^2}{4h}$ e elementi della diagonale principale pari a

$$a_{ii} = -\left(\frac{1}{k^2} + \frac{6}{h^2}\right).$$

Il metodo di Gauss-Seidel è convergente per ogni valore di k e per $h < \frac{4}{T^2}$. La stima dell'errore è $\max_{i,j} |u(x_i, t_j) - u_{ij}| \simeq 10^{-6}$.