

Nome, Cognome e matricola:

Corso di studi:

Prova scritta di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi
15 settembre 2022

1. Risolvere il seguente problema mediante il metodo degli integrali generali

$$\begin{cases} u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0 \\ u(x, 0) = x^2 \\ u_y(x, 0) = x + \cos(\pi x). \end{cases}$$

2. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} y''(x) + 8(\cos x)y'(x) - |x - \frac{1}{2}|y(x) = 0, & 0 \leq x \leq 2 \\ y(0) = 0 \\ y(2) = 3. \end{cases}$$

Si illustri

- (a) lo schema numerico che si ottiene mediante discretizzazione alle differenze finite;
- (b) le proprietà strutturali del sistema lineare a cui si perviene esplicitandolo in forma matriciale nel caso $n = 4$ (si espliciti matrice, vettore delle incognite e termine noto);
- (c) una stima dei nodi di discretizzazione affinché l'errore teorico del metodo sia dell'ordine di 10^{-4} .

3. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + (\sin x)u, & -1 \leq x \leq 1, \quad t \in [0, T] \\ u(-1, t) = t - 1 \\ u(1, t) = t + 1 \\ u(x, 0) = x \\ u_t(x, 0) = 2. \end{cases}$$

Si scriva

- (a) lo schema numerico alle differenze finite;
- (b) l'approssimazione della soluzione agli istanti t_j con $j = 0, 1, 2$, stabilendo, nel caso in cui l'approssimazione sia un sistema, la matrice dei coefficienti per $n = 4$;
- (c) le condizioni che assicurano la convergenza del metodo iterativo di Gauss-Seidel applicato al sistema determinato al punto precedente;
- (d) la stima teorica dell'errore nel caso in cui la griglia abbia passo $h = 10^{-2}$ e $k = 10^{-3}$.