Nome, Cognome e Matricola:...

Corso di Studi:..

Prima prova intermedia di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi
11 novembre 2022

1. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'(x) + 2y(x) = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, -1/2) \cup (1/2, 1], \\ 2(1+x), & x \in [-1/2, 0], \\ 2(1-x), & x \in [0, 1/2] \\ f(x+1), & \text{altrove.} \end{cases}$$

Stabilire, inoltre, motivando opportunamente la risposta, quale è il valore della serie di Fourier di f nei punti $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$. Dire, infine, se questa è differenziabile termine a termine.

Soluzione : Dal teorema della convergenza segue che $S_f(1/4) = 3/2$ *e* $S_f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ *e* $S_f(1) = 0$. *la serie della* f *non è differenziabile termine a termine in quanto la* f *non è continua. Inoltre risulta che*

$$S_y(x) = \frac{3}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2a_k}{4 + k^2\pi^2} \cos(k\pi x) + \frac{k\pi\, a_k}{4 + k^2\pi^2} \sin(k\pi x) \right],$$

dove

$$a_k = \frac{2}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{4}{k^2\pi^2}\left(1 - \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right).$$

2. Risolvere mediante il metodo degli integrali generali il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} 2u_{xx} + u_{xt} - 6u_{tt} = 0 \\ u(x, 0) = e^{2x} + x \\ u_t(x, 0) = e^{2x} + 1. \end{cases}$$

Soluzione:

$$u(x,t) = x + t + \frac{6}{7} e^{2x + \frac{4}{3}t} + \frac{1}{7} e^{2x - t}.$$

3. Si classifichi il seguente problema differenziale e si scriva la sua soluzione mediante sviluppo in serie con il metodo di separazione delle variabili

$$\begin{cases} u_t = -3u_{xx} - 6u_x + 9u, & x \in [0,\, 5], \qquad t \geq 0 \\ 2u_x(0,t) + u(0,t) = 0 \\ u(5,t) = 0 \\ u(x,0) = x. \end{cases}$$

NOTA: Nella risoluzione del problema di Sturm-Liouville si consideri solo il caso in cui le radici dell'equazione caratteristica sono complesse e coniugate.

Soluzione. Il problema differenziale è di tipo Cauchy-misto e la PDE è di tipo parabolico. Scriviamo $u(x,t) = v(x)w(t)$ *dove* v *e* w *sono soluzioni dei seguenti problemi*

$$w'(t) - \lambda w(t) = 0, \qquad \begin{cases} 3v''(x) + 6v'(x) + (\lambda - 9)v(x) = 0 \\ v(0) + 2v'(0) = 0 \\ v(5) = 0. \end{cases}$$

La soluzione risulta quindi essere

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k(x) w_k(t)$$

dove

- $v_k(x) = e^{-x}\left(\frac{2z_k}{5}\cos(z_k x) + \sin(z_k x)\right)$ *dove* $(2k+1)\frac{\pi}{2} \leq z_k \leq k\pi$
- $w_k(t) = e^{\lambda_k t}$ *con* $\lambda_k = 12 + \dfrac{3}{25} z_k^2$
- $c_k = \dfrac{\int_0^5 x\, v_k(x) r(x) dx}{\int_0^5 v_k^2(x) r(x) dx}$ *con* $r(x) = \frac{1}{3}e^{2x}$