Nome, Cognome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Seconda prova intermedia di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi
12 gennaio 2023

1. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2\beta & 0 \\ 2\beta & 2 & -\beta \\ 0 & -\beta & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$
Si stabilisca per quali valori del parametro β il sistema ammette un'unica soluzione. Si studi inoltre, al variare del parametro β, la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato a tale sistema. Si fissi $\beta = 1/4$. Si dica senza calcolare il raggio spettrale e motivando opportunamente la risposta se il metodo di Jacobi è convergente e si calcolino le prime due iterate di take metodo, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1\ 1\ 1]^T$.

   Soluzione. Il sistema ammette un'unica soluzione se $\beta \neq \pm\sqrt{2/5}$. Il metodo di Gauss-Seidel converge per $-\sqrt{2/5} < \beta < \sqrt{2/5}$. Se $\beta = 1/4$ la matrice è diagonalmente dominante in senso stretto e pertanto il metodo di Jacobi è convergente. Le prime due iterate del metodo di tale metodo sono $\mathbf{x}^{(1)} = [3/2, -17/8, 9/4]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [49/16, -67/32, 47/32]^T$.

2. Si consideri il seguente problema differenziale
$$\begin{cases} 3y''(x) + (x+2)^2 y'(x) - e^x y(x) = \cos(x), & -1 \leq x \leq 1 \\ y(-1) = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$
Si stabilisca
   (a) lo schema numerico che si ottiene mediante discretizzazione alle differenze finite;
   (b) il sistema lineare a cui si perviene esplicitandolo in forma matriciale nel caso $n = 4$ (si espliciti matrice, vettore delle incognite e termine noto);
   (c) le condizioni da imporre al passo di discretizzazione h affinchè il sistema risulti essere invertibile e possa essere risolto mediante un metodo iterativo stazionario del primo ordine spiegandone il motivo;
   (d) il numero dei nodi di discretizzazione necessari ad avere almeno un errore dell'ordine di 10^{-3}.

Soluzione. Il sistema a cui si perviene è tridiagonale e la matrice dei coefficienti del sistema è a dominanza diagonale in senso stretto se $h < \frac{2}{3}$. Sotto tale ipotesi, il sistema quindi è invertibile e un metodo di tipo Jacobi o Gauss-Seidel potrebbe essere applicato per la sua risoluzione in quanto sicuramente convergenti. Se si sceglie un numero di nodi $n \geq 2 \cdot \sqrt{10^3} - 1$ l'errore teorico del metodo è dell'ordine richiesto.

3. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} 2u_{yy} + 3u_{xx} - (xy+1)u_y - |x|u = (2 + \sin xy), & -2 \leq x, y \leq 2, \\ u(-2, y) = -2 \\ u(2, y) = 2 \\ u(x, 2) = x \\ u(x, -2) = x. \end{cases}$$

Si stabilisca

(a) la classificazione della PDE e del problema dato;

(b) lo schema numerico che si ottiene mediante discretizzazione alle differenze finite, specificando quali sono gli elementi della diagonale principale della matrice dei coefficienti del sistema a cui si perviene e gli elementi della prima sopra e sotto diagonale;

(c) le condizioni da imporre ai passi di discretizzazione h e k affinchè il sistema risulti essere invertibile e possa essere risolto mediante un metodo di tipo Jacobi o Gauss-Seidel;

(d) la stima teorica dell'errore, motivando opportunamente la risposta.

Soluzione. (a) Il problema è di tipo Dirichlet e l'equazione è di tipo ellittico. (b) Lo schema numerico è quello di discretizzazione a 5 punti. Gli elementi della diagonale principale sono $a_{ij} = -\left(\frac{4}{k^2} + \frac{6}{h^2} + |x_i|\right)$ mentre quelli della prima sopra e sotto diagonale sono pari a $3/h^2$. (c) Il sistema è invertibile e risolvibile con un metodo di tipo Jacobi o Gauss-Seidel se $k < \frac{4}{5}$ e per ogni valore di h. (d)Avendo approssimato tutte le derivate con differenze finite centrate, la stima teorica dell'errore è $\mathcal{O}(h^2 + k^2)$.