

Nome, Cognome e matricola:

Corso di studi:

Prova scritta di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi
12 gennaio 2023

1. Risolvere, mediante il metodo degli integrali generali, il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{yy} = 0 \\ u(x, 0) = \sin(3x) \\ u_y(x, 0) = 3 \cos(3x) + 2. \end{cases}$$

Soluzione.

$$u(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{18}(2 + \sqrt{3}(\sin(3(x + z_1y)) - \sin(3(x + z_2y)))) - 2y.$$

2. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} 3y''(x) + (x + 2)^2y'(x) - e^x y(x) = \cos(x), & -1 \leq x \leq 1 \\ y(-1) = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Si stabilisca

- (a) lo schema numerico che si ottiene mediante discretizzazione alle differenze finite;
- (b) il sistema lineare a cui si perviene esplicitandolo in forma matriciale nel caso $n = 4$ (si espliciti matrice, vettore delle incognite e termine noto);
- (c) le condizioni da imporre al passo di discretizzazione h affinché il sistema risulti essere invertibile e possa essere risolto mediante un metodo iterativo stazionario del primo ordine spiegandone il motivo;
- (d) il numero dei nodi di discretizzazione necessari ad avere almeno un errore dell'ordine di 10^{-3} .

Soluzione. Il sistema a cui si perviene è tridiagonale e la matrice dei coefficienti del sistema è a dominanza diagonale in senso stretto se $h < \frac{2}{3}$. Sotto tale ipotesi, il sistema quindi è invertibile e un metodo di tipo Jacobi o Gauss-Seidel potrebbe essere applicato per la sua risoluzione in quanto sicuramente convergenti. Se si sceglie un numero di nodi $n \geq 2 \cdot \sqrt{10^3} - 1$ l'errore teorico del metodo è dell'ordine richiesto.

3. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} 2u_{yy} + 3u_{xx} - (xy + 1)u_y - |x|u = (2 + \sin xy), & -2 \leq x, y \leq 2, \\ u(-2, y) = -2 \\ u(2, y) = 2 \\ u(x, 2) = x \\ u(x, -2) = x. \end{cases}$$

Si stabilisca

- (a) la classificazione della PDE e del problema dato;
- (b) lo schema numerico che si ottiene mediante discretizzazione alle differenze finite, specificando quali sono gli elementi della diagonale principale della matrice dei coefficienti del sistema a cui si perviene e gli elementi della prima sopra e sotto diagonale;
- (c) le condizioni da imporre ai passi di discretizzazione h e k affinché il sistema risulti essere invertibile e possa essere risolto mediante un metodo di tipo Jacobi o Gauss-Seidel;
- (d) la stima teorica dell'errore, motivando opportunamente la risposta.

Soluzione. (a) Il problema è di tipo Dirichlet e l'equazione è di tipo ellittico. (b) Lo schema numerico è quello di discretizzazione a 5 punti. Gli elementi della diagonale principale sono $a_{ij} = -\left(\frac{4}{k^2} + \frac{6}{h^2} + |x_i|\right)$ mentre quelli della prima sopra e sotto diagonale sono pari a $3/h^2$. (c) Il sistema è invertibile e risolvibile con un metodo di tipo Jacobi o Gauss-Seidel se $k < \frac{4}{5}$ e per ogni valore di h . (d) Avendo approssimato tutte le derivate con differenze finite centrate, la stima teorica dell'errore è $\mathcal{O}(h^2 + k^2)$.