Nome, Cognome e Matricola:...

Corso di Studi:...

Prova scritta di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi
26 gennaio 2023

1. Risolvere mediante il metodo degli integrali generali il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} 3u_{xx} + 2u_{xt} - u_{tt} = 0 \\ u(x,0) = x \\ u_t(x,0) = e^{2x} + 1. \end{cases}$$

Soluzione:

$$u(x,t) = x + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\left(e^{2(x+3t)} - e^{2(x-t)}\right).$$

2. Si classifichi il seguente problema differenziale e si scriva la sua soluzione mediante sviluppo in serie con il metodo di separazione delle variabili

$$\begin{cases} u_t = -2u_{xx} + 4u_x - 3u, \qquad x \in [0,\, 5], \qquad t \geq 0 \\ u_x(0,t) + u(0,t) = 0 \\ u(5,t) = 0 \\ u(x,0) = x(5-x). \end{cases}$$

NOTA: Nella risoluzione del problema di Sturm-Liouville si consideri solo il caso in cui le radici dell'equazione caratteristica sono complesse e coniugate.

Soluzione. Il problema differenziale è di tipo Cauchy-misto e la PDE è di tipo parabolico. Scriviamo $u(x,t) = v(x)w(t)$ dove v e w sono soluzioni dei seguenti problemi

$$w'(t) - \lambda w(t) = 0, \qquad \begin{cases} 2v''(x) + 4v'(x) - (3+\lambda)v(x) = 0 \\ v(0) + v'(0) = 0 \\ v(5) = 0. \end{cases}$$

La soluzione risulta quindi essere

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k(x) w_k(t)$$

dove

- $v_k(x) = e^{-x/4}\left(-\frac{4z_k}{5}\cos(z_k x) + \sin(z_k x)\right)$ *dove* $k\pi \leq z_k \leq (2k+1)\frac{\pi}{2}$
- $w_k(t) = e^{\lambda_k t}$ *con* $\lambda_k = \dfrac{2}{25}z_k^2 - 1$
- $c_k = \dfrac{\int_0^5 x(5-x)\, v_k(x) r(x) dx}{\int_0^5 v_k^2(x) r(x) dx}$ *con* $r(x) = \frac{1}{2}e^{-2x}$

3. Illustrare la risoluzione numerica, mediante discretizzazione alle differenze finite, del seguente problema differenziale

$$\begin{cases} 2y''(x) + e^x y'(x) - (1-\sin x)y(x) = x - 1, & -4 \leq x \leq 4 \\ y(-4) = 1 \\ y(4) = 3. \end{cases}$$

Si stabilisca

(a) lo schema numerico che si ottiene mediante discretizzazione alle differenze finite;

(b) il sistema lineare a cui si perviene esplicitandolo in forma matriciale nel caso $n = 5$ (si espliciti matrice, vettore delle incognite e termine noto);

(c) le condizioni da imporre al passo di discretizzazione h affinchè il sistema risulti essere invertibile e possa essere risolto mediante un metodo iterativo stazionario del primo ordine spiegandone il motivo;

(d) la stima teorica dell'errore, motivando opportunamente la risposta.

Soluzione. Il sistema a cui si perviene è tridiagonale e la matrice dei coefficienti del sistema è a dominanza diagonale in senso stretto se $h < 4 \cdot e^{-4} \simeq 0.07$. *Sotto tale ipotesi, il sistema quindi è invertibile e un metodo di tipo Jacobi o Gauss-Seidel potrebbe essere applicato per la sua risoluzione in quanto sicuramente convergenti. L'errore teorico del metodo è dell'ordine di* h^2, *avendo usato delle differenze finite centrate.*