Nome, Cognome e Matricola:..

Corso di Studi:..

Prova scritta di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi
13 febbraio 2023

1. Risolvere mediante il metodo degli integrali generali il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_{xx} + 3u_{xt} - 3u_{tt} = 0 \\ u(x,0) = x^3 + 2x \\ u_t(x,0) = x^2. \end{cases}$$

   Soluzione:

$$u(x,t) = F(x + z_1 t) + G(x + z_2 t),$$

   dove $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{21}}{6}$, $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{21}}{6}$ *e*

$$F(x) = \frac{3z_1}{\sqrt{21}}(x^3 + 2x) - \frac{4}{3}x^3 - 2x, \qquad G(x) = \frac{3z_1}{\sqrt{21}}(x^3 + 2x) - \frac{x^3}{3}.$$

2. Determinare gli autovalori $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ e le autofunzioni $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ del seguente problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} y''(x) + 4y'(x) + (4 + \lambda)y(x) = 0, \qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ y(0) + y'(0) = 0 \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0. \end{cases}$$

   Identificare la funzione peso rispetto alla quale le autofunzioni sono ortogonali stabilendo la relazione di ortogonalità e illustrare un modo per calcolare i coefficienti della seguente serie

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k(x),$$

   dove f è una funzione continua definita in $[0,\, \pi/2]$.

   Soluzione: Gli autovalori sono dati da

$$\lambda_k = \gamma_k^2 = \frac{4}{\pi^2} z_k, \qquad \textit{con} \quad (2k-1)\frac{\pi}{2} < z_k < k\pi.$$

Le autofunzioni sono date da

$$y_k(x) = e^{-2x}\left[\cos(\gamma_k x) - \gamma_k \sin(\gamma_k x)\right]$$

e sono ortogonali rispetto alla funzione peso $r(x) = e^{4x}$ *nel senso che*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} y_k(x) y_h(x) r(x) dx = N_k \delta_{hk},$$

con N_k *opportuna costante diversa da zero. I coefficienti richiesti sono dati*

$$c_k = \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} y_k(x) f(x) r(x) dx}{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} y_k^2(x) r(x) dx}.$$

3. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_{yy} + u_{xx} - (xy)u_y - |xcos(x)|u = 1, & -3 \le x, y \le 3, \\ u(-3, y) = -3 \\ u(3, y) = 3 \\ u(x, 3) = x \\ u(x, -3) = x. \end{cases}$$

Si stabilisca

(a) la classificazione della PDE e del problema dato;

(b) lo schema numerico che si ottiene mediante discretizzazione alle differenze finite, specificando quali sono gli elementi della diagonale principale della matrice dei coefficienti del sistema a cui si perviene e gli elementi della prima sopra e sotto diagonale;

(c) le condizioni da imporre ai passi di discretizzazione h e k affinchè il sistema risulti essere invertibile e possa essere risolto mediante un metodo di tipo Jacobi o Gauss-Seidel;

(d) quale ordine di grandezza deve avere k per avere una un errore dell'ordine di 10^{-6} se $h = 10^{-3}$.

Soluzione. (a) Il problema è di tipo Dirichlet e l'equazione è di tipo ellittico. (b) Lo schema numerico è quello di discretizzazione a 5 punti. Gli elementi della diagonale principale sono $a_{ij} = -\left(\frac{4}{k^2} + \frac{6}{h^2} + |x_i \cos(x_i)|\right)$ *mentre quelli della prima sopra e sotto diagonale sono pari a* $1/h^2$*. (c) Il sistema è invertibile e risolvibile con un metodo di tipo Jacobi o Gauss-Seidel se* $k < \frac{2}{9}$ *e per ogni valore di* h*. (d) Avendo approssimato tutte le derivate con differenze finite centrate, la stima teorica dell'errore è* $\mathcal{O}(h^2 + k^2)$*. Pertanto, se vogliamo un errore dell'ordine richiesto, essendo* $h = 10^{-3}$*, il passo di discretizzazione* k *deve essere almendo dello stesso ordine di* h*.*