Nome, Cognome e Matricola:..
Corso di Studi:..

Prova scritta di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi
3 aprile 2023

1. Risolvere mediante il metodo degli integrali generali il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_{xx} - 5u_{xt} + 6u_{tt} = 0 \\ u(x,0) = x^2 + x \\ u_t(x,0) = x. \end{cases}$$

Soluzione:

$$u(x,t) = \left(x + \frac{t}{2}\right)^2 + x$$

2. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{1}{4}y''(x) + (x\sin x)y'(x) + (2\cos x - 3)y(x) = x^2, \qquad -3 \le x \le 3 \\ y(-3) = 1 \\ y(3) = 2 \end{cases}$$

Si stabilisca

(a) lo schema numerico che si ottiene mediante discretizzazione alle differenze finite;

(b) il sistema lineare a cui si perviene esplicitandolo in forma matriciale nel caso $n = 3$ (si espliciti matrice, vettore delle incognite e termine noto);

(c) le condizioni da imporre al passo di discretizzazione h affinchè il sistema risulti essere invertibile e possa essere risolto mediante un metodo iterativo stazionario del primo ordine spiegandone il motivo;

(d) il numero dei nodi di discretizzazione necessari ad avere almeno un errore dell'ordine di 10^{-3}.

Soluzione. Il sistema a cui si perviene è tridiagonale e la matrice dei coefficienti del sistema è a dominanza diagonale in senso stretto se $h < \frac{1}{6}$. Sotto tale ipotesi, il sistema quindi è invertibile e un metodo di tipo Jacobi o Gauss-Seidel potrebbe essere applicato per la sua risoluzione in quanto sicuramente convergenti. Se si sceglie un numero di nodi $n \ge 6 \cdot 10^3 - 1$ l'errore teorico del metodo è dell'ordine richiesto.

3. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} 2u_{yy} + 3u_{xx} - |x|u = 3, & -2 \le x, y \le 2, \\ u(-2, y) = -2 \\ u(2, y) = 2 \\ u(x, 2) = x \\ u(x, -2) = x. \end{cases}$$

Si stabilisca

(a) la classificazione della PDE e del problema dato;

(b) lo schema numerico che si ottiene mediante discretizzazione alle differenze finite, fornendo l'espressione degli elementi non nulli della matrice, specificandone la posizione;

(c) le condizioni da imporre ai passi di discretizzazione h e k affinchè il sistema risulti essere invertibile e possa essere risolto mediante un metodo di tipo Jacobi o Gauss-Seidel;

(d) la stima teorica dell'errore, motivando opportunamente la risposta.

Soluzione. (a) Il problema è di tipo Dirichlet e l'equazione è di tipo ellittico. (b) Lo schema numerico è quello di discretizzazione a 5 punti. Gli elementi della diagonale principale sono $a_{ij} = -\left(\frac{4}{k^2} + \frac{6}{h^2} + |x_i|\right)$, *quelli della prima sopra e sotto diagonale sono pari a* $3/h^2$ *e quelli delle altre diagonali non nulle sono pari a* $3/k^2$. *(c) Il sistema è invertibile e risolvibile con un metodo di tipo Jacobi o Gauss-Seidel per ogni valore di* h *e* k. *(d) Avendo approssimato tutte le derivate con differenze finite centrate, la stima teorica dell'errore è* $\mathcal{O}(h^2 + k^2)$.