Nome, Cognome e Matricola:...

Corso di Studi:...

Prima prova intermedia di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi
17 novembre 2023

1. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'(x) - 2y(x) = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} -3, & x \in [-6, -3), \\ 2x, & x \in [-3, 3), \\ 3, & x \in [3, 6] \\ f(x+12), & \text{altrove.} \end{cases}$$

Stabilire, inoltre, motivando opportunamente la risposta, quale è il valore della serie di Fourier di f nei punti $x = 1, 3, 4, 6$. Dire, infine, se questa è differenziabile termine a termine.

Soluzione : Dal teorema della convergenza segue che $S_f(1) = 2$, $S_f(3) = \frac{9}{2}$, $S_f(4) = 3$, e $S_f(6) = 0$. la serie della f non è differenziabile termine a termine in quanto la f non è continua nei punti ± 3. Inoltre risulta che

$$S_y(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{6k\pi b_k}{144 + k^2\pi^2} \cos\left(k\frac{\pi}{6}x\right) + \frac{72 b_k}{144 + k^2\pi^2} \sin\left(k\frac{\pi}{6}x\right) \right],$$

dove

$$b1_k = \frac{24}{(k\pi)^2} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{6}{k\pi}\left((-1)^k + \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right).$$

2. Risolvere mediante il metodo degli integrali generali il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_{xx} - 3u_{xt} - 10u_{tt} = 0 \\ u(x,0) = 3x \\ u_t(x,0) = \sin(8x). \end{cases}$$

Soluzione:

$$u(x,t) = 3x + \frac{5}{28}\left[\cos(4(2x - t)) - \cos\left(\frac{8}{5}(5x + t)\right)\right].$$

3. Si classifichi il seguente problema differenziale e si scriva la sua soluzione mediante sviluppo in serie con il metodo di separazione delle variabili

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} - 4u_x + u, & x \in [0,\, 2], \qquad t \geq 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(2,t) = 0 \\ u(x,0) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

NOTA: Nella risoluzione del problema di Sturm-Liouville si consideri solo il caso in cui le radici dell'equazione caratteristica sono complesse e coniugate.

Soluzione. Il problema differenziale è di tipo Cauchy-Dirichlet e la PDE è di tipo iperbolica, omogenea e lineare. Scriviamo $u(x,t) = v(x)w(t)$ *dove* v *e* w *sono soluzioni dei seguenti problemi*

$$\begin{cases} w''(t) - \lambda w(t) = 0, \\ w'(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4v''(x) - 4v'(x) + (1-\lambda)v(x) = 0 \\ v(0) = 0 \\ v(2) = 0. \end{cases}$$

La soluzione risulta quindi essere

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k(x) w_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{x/2} \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \cos(k\pi t)$$

dove

$$c_k = \int_0^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right) e^{-x/2} dx,$$

essendo $\int_0^2 \sin^2\left(\frac{k\pi x}{2}\right) dx = 1.$