Nome, Cognome e matricola: ....
Corso di studi: ....

Seconda prova intermedia di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi
12 gennaio 2024

1. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

   Si stabilisca per quali valori del parametro a il sistema ammette un'unica soluzione. Si studi inoltre, al variare del parametro a, la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato a tale sistema. Si fissi $a = 4$. Si dica senza calcolare il raggio spettrale e motivando opportunamente la risposta se il metodo di Jacobi è convergente e si calcolino le prime due iterate di take metodo, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0\ 1\ 1]^T$.

   Soluzione. Il sistema ammette un'unica soluzione se $a \neq 0, \pm\sqrt{5}$. Il metodo di Gauss-Seidel converge per $a < -\sqrt{5}$ e $a > \sqrt{5}$. Se $a = 4$ la matrice è diagonalmente dominante in senso stretto e pertanto il metodo di Jacobi è convergente. Le prime due iterate del metodo di tale metodo sono $\mathbf{x}^{(1)} = [-1/4, -1, 1/2]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [7/8, -7/8, 9/16]^T$.

2. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} 3y''(x) + (x^2+1)y'(x) - (1+\sin^2(x))y(x) = g(x), & -1 \le x \le 4 \\ y(-1) = \alpha \\ y(4) = \beta \end{cases}$$

   Si stabilisca

   (a) il termine noto g e i valori di α e β, in modo che la soluzione esatta del problema dato sia $y(x) = xe^x$;

   (b) lo schema numerico che si ottiene mediante discretizzazione alle differenze finite;

   (c) il sistema lineare a cui si perviene esplicitandolo in forma matriciale nel caso $n = 4$ (si espliciti matrice, vettore delle incognite e termine noto);

   (d) le condizioni da imporre al passo di discretizzazione h affinchè il sistema risulti essere invertibile e possa essere risolto mediante un metodo iterativo stazionario del primo ordine spiegandone il motivo;

(e) il numero dei nodi di discretizzazione necessari ad avere almeno un errore dell'ordine di 10^{-8}.

Soluzione. Risulta $\alpha = -e^{-1}$, $\beta = 4e^4$, *e* $g(x) = e^x(7 + x(x^2 + x + 3 - \sin^2(x)))$. *Il sistema a cui si perviene è tridiagonale e la matrice dei coefficienti del sistema è a dominanza diagonale in senso stretto se* $h < \frac{6}{17}$. *Sotto tale ipotesi, il sistema quindi è invertibile e un metodo di tipo Jacobi o Gauss-Seidel potrebbe essere applicato per la sua risoluzione in quanto sicuramente convergenti. Se si sceglie un numero di nodi* $n \geq 5\sqrt{10^4} - 1$ *l'errore teorico del metodo è dell'ordine richiesto.*

3. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} -(2 + x^2 + y^2)u_{yy} - (2 + x^2 + y^2)u_{xx} + (1 + 2\cos^2(x + y))u = 3, \quad x \in [0,\, 2\pi], \quad y \in [0,\, \pi] \\ u(0, y) = g_1(y) \\ u(2\pi, y) = g_2(y) \\ u(x, 0) = f_1(x) \\ u(x, \pi) = f_2(x), \end{cases}$$

dove g_1, g_2, f_1, e f_2 sono funzioni note. Si stabilisca

(a) la classificazione della PDE e del problema dato;

(b) lo schema numerico che si ottiene mediante discretizzazione alle differenze finite, specificando quali sono gli elementi non nulli e su quale diagonale si collocano;

(c) le condizioni da imporre ai passi di discretizzazione h e k affinchè il sistema risulti essere invertibile;

(d) la stima teorica dell'errore, motivando opportunamente la risposta.

Soluzione. (a) Il problema è di tipo Dirichlet e l'equazione è di tipo ellittico in ogni punto del dominio. (b) Lo schema numerico è quello di discretizzazione a 5 punti. Gli elementi della diagonale principale sono

$$a_{ij} = (2 + x_i^2 + y_j^2)\left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{k^2}\right) + (1 + 2\cos^2(x + y)),$$

quelli della prima sopra e sotto diagonale sono pari a

$$b_{ij} = \hat{b}_{ij} = -\frac{(2 + x_i^2 + y_j^2)}{h^2}$$

mentre quelli della n-esima sopra e sotto diagonale sono pari a

$$c_{ij} = \hat{c}_{ij} = -\frac{(2 + x_i^2 + y_j^2)}{k^2}.$$

(c) Il sistema è invertibile per ogni valore di h, k. *(d)Avendo approssimato tutte le derivate con differenze finite centrate, la stima teorica dell'errore è* $\mathcal{O}(h^2 + k^2)$.