

Nome, Cognome e matricola:

Corso di studi:

Prova scritta di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi
12 gennaio 2024

1. Risolvere mediante il metodo degli integrali generali il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_{xx} + 18u_{xt} + 45u_{tt} = 0 \\ u(x, 0) = 2x^2 + 3 \\ u_t(x, 0) = 5x + 2. \end{cases}$$

Soluzione:

$$u(x, t) = F\left(x - \frac{t}{15}\right) + G\left(x - \frac{t}{3}\right).$$

dove $F(z) = 3 + \frac{15}{2}z + \frac{99}{8}z^2$ e $G(z) = -\frac{83}{8}z^2 - \frac{15}{2}z$.

2. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} 3y''(x) + (x^2 + 1)y'(x) - (1 + \sin^2(x))y(x) = g(x), & -1 \leq x \leq 4 \\ y(-1) = \alpha \\ y(4) = \beta \end{cases}$$

Si stabilisca

- (a) il termine noto g e i valori di α e β , in modo che la soluzione esatta del problema dato sia $y(x) = xe^x$;
- (b) lo schema numerico che si ottiene mediante discretizzazione alle differenze finite;
- (c) il sistema lineare a cui si perviene esplicitandolo in forma matriciale nel caso $n = 4$ (si espliciti matrice, vettore delle incognite e termine noto);
- (d) le condizioni da imporre al passo di discretizzazione h affinché il sistema risulti essere invertibile e possa essere risolto mediante un metodo iterativo stazionario del primo ordine spiegandone il motivo;
- (e) il numero dei nodi di discretizzazione necessari ad avere almeno un errore dell'ordine di 10^{-8} .

Soluzione. Risulta $\alpha = -e^{-1}$, $\beta = 4e^4$, e $g(x) = e^x(7 + x(x^2 + x + 3 - \sin^2(x)))$. Il sistema a cui si perviene è tridiagonale e la matrice dei coefficienti del sistema è a dominanza diagonale in senso stretto se $h < \frac{6}{17}$. Sotto tale ipotesi, il sistema quindi è invertibile e un metodo di tipo Jacobi o Gauss-Seidel potrebbe essere applicato per la sua risoluzione in quanto sicuramente convergenti. Se si sceglie un numero di nodi $n \geq 5\sqrt{10^4} - 1$ l'errore teorico del metodo è dell'ordine richiesto.

3. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} -(2 + x^2 + y^2)u_{yy} - (2 + x^2 + y^2)u_{xx} + (1 + 2 \cos^2(x + y))u = 3, & x \in [0, 2\pi], \quad y \in [0, \pi] \\ u(0, y) = g_1(y) \\ u(2\pi, y) = g_2(y) \\ u(x, 0) = f_1(x) \\ u(x, \pi) = f_2(x), \end{cases}$$

dove $g_1, g_2, f_1, e f_2$ sono funzioni note. Si stabilisca

- la classificazione della PDE e del problema dato;
- lo schema numerico che si ottiene mediante discretizzazione alle differenze finite, specificando quali sono gli elementi non nulli e su quale diagonale si collocano;
- le condizioni da imporre ai passi di discretizzazione h e k affinché il sistema risulti essere invertibile;
- la stima teorica dell'errore, motivando opportunamente la risposta.

Soluzione. (a) Il problema è di tipo Dirichlet e l'equazione è di tipo ellittico in ogni punto del dominio. (b) Lo schema numerico è quello di discretizzazione a 5 punti. Gli elementi della diagonale principale sono

$$a_{ij} = (2 + x_i^2 + y_j^2) \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{k^2} \right) + (1 + 2 \cos^2(x_i + y_j)),$$

quelli della prima sopra e sotto diagonale sono pari a

$$b_{ij} = \hat{b}_{ij} = -\frac{(2 + x_i^2 + y_j^2)}{h^2}$$

mentre quelli della n -esima sopra e sotto diagonale sono pari a

$$c_{ij} = \hat{c}_{ij} = -\frac{(2 + x_i^2 + y_j^2)}{k^2}.$$

(c) Il sistema è invertibile per ogni valore di h, k . (d) Avendo approssimato tutte le derivate con differenze finite centrate, la stima teorica dell'errore è $\mathcal{O}(h^2 + k^2)$.