Nome, Cognome e matricola: ....
Corso di studi: ....

Prova scritta di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi
26 gennaio 2024

1. Risolvere mediante il metodo degli integrali generali il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - 6u_{xt} + 5u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = 2x - 1 \\ u_t(x,0) = 3x^2. \end{cases}$$

Soluzione:

$$u(x,t) = \frac{1}{4}[(x+5t)^3 - (x+t)^3] + 2x - 1.$$

2. Determinare lo spettro del seguente problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} y''(x) + 8y'(x) + (20+\lambda)y(x) = 0, \qquad 0 \le x \le 2\pi \\ y'(0) + 3y(0) = 0 \\ y(2\pi) = 0. \end{cases}$$

Soluzione. Lo spettro è costituito dagli autovalori

$$\left\{ \lambda_k = \left(\frac{z_k}{2\pi}\right)^2 - 4, \quad con \quad k\pi < z_k < (2k+1)\frac{\pi}{2} \right\}_{k=1}^{\infty},$$

e dalle autofunzioni $\left\{ v_k = e^{-4x}\left[\cos\left(\frac{z_k}{2\pi}x\right) + \frac{\pi}{2z_k}\sin\left(\frac{z_k}{2\pi}x\right)\right]\right\}_{k=1}^{\infty}$.

3. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} -(1+x^4y^2)u_{yy} - u_{xx} + 2(x+y)u = 3y\cos x, \quad x \in [0,\, 4], \quad y \in [0,\, \pi] \\ u(0,y) = g_1(y) \\ u(4,y) = g_2(y) \\ u(x,0) = f_1(x) \\ u(x,\pi) = f_2(x), \end{cases}$$

dove g_1, g_2, f_1, e f_2 sono funzioni note. Si stabilisca

(a) la classificazione della PDE e del problema dato;

(b) lo schema numerico che si ottiene mediante discretizzazione alle differenze finite, specificando quali sono gli elementi non nulli e su quale diagonale si collocano;

(c) le condizioni da imporre ai passi di discretizzazione h e k affinchè il sistema risulti essere invertibile;

(d) la stima teorica dell'errore, motivando opportunamente la risposta.

Soluzione. (a) Il problema è di tipo Dirichlet e l'equazione è di tipo ellittico in ogni punto del dominio. (b) Lo schema numerico è quello di discretizzazione a 5 punti. Gli elementi della diagonale principale sono

$$a_{ij} = \frac{2}{h^2} + \frac{2(2 + x_i^4 y_j^2)}{k^2} + 2(x_i + y_j),$$

quelli della prima sopra e sotto diagonale sono pari a

$$b_{ij} = \hat{b}_{ij} = -\frac{1}{h^2}$$

mentre quelli della n-esima sopra e sotto diagonale sono pari a

$$c_{ij} = \hat{c}_{ij} = -\frac{(2 + x_i^4 y_j^2)}{k^2}.$$

(c) Il sistema è invertibile per ogni valore di h, k. (d)Avendo approssimato tutte le derivate con differenze finite centrate, la stima teorica dell'errore è $\mathcal{O}(h^2 + k^2)$.