Nome, Cognome e matricola: ....
Corso di studi: ....

Prova scritta di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi
5 aprile 2024

1. Risolvere mediante il metodo degli integrali generali il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} + 13u_{xt} + 40u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = x^2 + 9 \\ u_t(x,0) = 3x + 7. \end{cases}$$

   Soluzione:

$$u(x,t) = \frac{19}{6}(x-5t)^2 - \frac{13}{6}(x-8t)^2 + 7t + 9.$$

2. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} 3y''(x) + (x^2+3)y'(x) - \sin^2(x)y(x) = g(x), \qquad -1 \le x \le 4 \\ y(-1) = \alpha \\ y(4) = \beta \end{cases}$$

   Si stabilisca

   (a) il termine noto g e i valori di α e β, in modo che la soluzione esatta del problema dato sia $y(x) = e^x$;

   (b) lo schema numerico che si ottiene mediante discretizzazione alle differenze finite;

   (c) il sistema lineare a cui si perviene esplicitandolo in forma matriciale nel caso $n = 4$ (si espliciti matrice, vettore delle incognite e termine noto);

   (d) le condizioni da imporre al passo di discretizzazione h affinchè il sistema risulti essere invertibile e possa essere risolto mediante un metodo iterativo stazionario del primo ordine spiegandone il motivo;

   (e) il numero dei nodi di discretizzazione necessari ad avere almeno un errore dell'ordine di 10^{-4}.

Soluzione. Risulta $\alpha = e^{-1}$, $\beta = e^4$, *e* $g(x) = e^x(7 + x(x^2 + x + 3 - \sin^2(x)))$. *Il sistema a cui si perviene è tridiagonale e la matrice dei coefficienti del sistema è a dominanza diagonale in senso stretto se* $h < \frac{6}{17}$. *Sotto tale ipotesi, il sistema quindi è invertibile e un metodo di tipo Jacobi o Gauss-Seidel potrebbe essere applicato per la sua risoluzione in quanto sicuramente convergenti. Se si sceglie un numero di nodi* $n \geq 5\sqrt{10^4} - 1$ *l'errore teorico del metodo è dell'ordine richiesto.*

3. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_{yy} + x^4 u_{xx} - 2(x^2 + 2y)u = 3y\cos x, \quad x, y \in [0,\, 4] \\ u(0, y) = g_1(y) \\ u(4, y) = g_2(y) \\ u(x, 0) = f_1(x) \\ u(x, 4) = f_2(x), \end{cases}$$

dove g_1, g_2, f_1, e f_2 sono funzioni note. Si stabilisca

(a) la classificazione della PDE e del problema dato;

(b) lo schema numerico che si ottiene mediante discretizzazione alle differenze finite, specificando quali sono gli elementi non nulli e su quale diagonale si collocano;

(c) le condizioni da imporre ai passi di discretizzazione h e k affinchè il sistema risulti essere invertibile;

(d) la stima teorica dell'errore, motivando opportunamente la risposta.

Soluzione. (a) Il problema è di tipo Dirichlet e l'equazione è di tipo ellittico in ogni punto del dominio. (b) Lo schema numerico è quello di discretizzazione a 5 punti. Gli elementi della diagonale principale sono

$$a_{ij} = -\frac{2x_i^4}{h^2} - \frac{2}{k^2} - 2(x_i^2 + 2y_j),$$

quelli della prima sopra e sotto diagonale sono pari a

$$b_{ij} = \hat{b}_{ij} = \frac{x_i^4}{h^2}$$

mentre quelli della n-esima sopra e sotto diagonale sono pari a

$$c_{ij} = \hat{c}_{ij} = \frac{1}{k^2}.$$

(c) Il sistema è invertibile per ogni valore di h, k. *(d)Avendo approssimato tutte le derivate con differenze finite centrate, la stima teorica dell'errore è* $\mathcal{O}(h^2 + k^2)$.